Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Test di Geometria

Tempo a disposizione: 20 minuti

9 Settembre 2024

| | | | | | | | | | | | | | | |
(Cognome)

| | | | | | | | | | |
(Nome)

| | | | | | |
(Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -2**

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) I vettori $v_1 = (2,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$ e $v_3 = (2,1,0)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.	☐	☒
2) Se $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare allora $\dim(\ker(T)) \geq 2$.	☒	☐
3) Due autovettori linearmente indipendenti di una stessa matrice A hanno autovalori diversi.	☐	☒
4) Se $A = \{2k \mid 1 \leq n \leq 6,\, n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{n^2 + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ allora $A \cap B$ contiene un unico elemento.	☐	☒
5) Il prodotto di due matrici invertibili $n \times n$ è una matrice invertibile.	☒	☐
6) Sia $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare suriettiva. Allora $m \leq n$.	☐	☒
7) Il quadrato del coniugato $\overline{z}$ di un numero complesso z è uguale al coniugato del quadrato z^2.	☒	☐
8) Se una matrice ha le righe tutte diverse allora è invertibile.	☐	☒
9) Esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^2$ tale che $v \notin \mathrm{Span}\{(1,0),(2,2)\}$.	☐	☒
10) La composizione di due funzioni iniettive è iniettiva.	☒	☐
11) L'equazione complessa $z^2 + 1 = 0$ ha 2 soluzioni distinte.	☒	☐
12) Se l'appl. lin. associata alla matrice A è suriettiva allora ogni sistema lineare $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ha soluzione.	☒	☐

Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

9 Settembre 2024
Tempo a disposizione : 120 minuti

Per essere considerate valide, le risposte devono essere giustificate

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. [6 pt.]
Trovare tutte le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$2z^3 = 50\,\overline{z}.$$

In coordinate polari:

$z = (\rho, \theta) \Rightarrow \overline{z} = (\rho, -\theta) \Rightarrow 50\overline{z} = (50\rho, -\theta)$

$z = (\rho, \theta) \Rightarrow z^3 = (\rho^3, 3\theta) \Rightarrow 2z^3 = (2\rho^3, 3\theta)$

Dunque $2z^3 = 50\overline{z} \Rightarrow (2\rho^3, 3\theta) = (50\rho, -\theta)$

$$\begin{cases} 2\rho^3 = 50\rho \Rightarrow \rho(\rho^2 - 25) = 0 \Rightarrow \rho = 0 \text{ o } \rho = 5 \\ 3\theta = -\theta + 2k\pi \Rightarrow 4\theta = 2k\pi \Rightarrow \theta = k \cdot \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ (poi si ripetono)

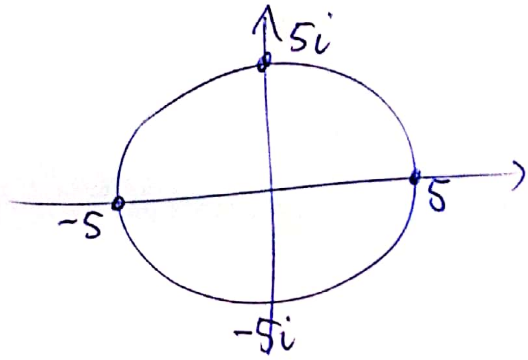
$\rho = 0 \Rightarrow z_0 = 0$

$\rho = 5$ & $\theta = 0 \Rightarrow z_1 = 5$

$\rho = 5$ & $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z_2 = 5i$

$\rho = 5$ & $\theta = \pi \Rightarrow z_3 = -5$

$\rho = 5$ & $\theta = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow z_4 = -5i$



Esercizio 2. [10 pt.]
Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare così definita:

$$T(x, y, z) = (-x + 3y + 2z, -y + z)$$

1. Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.
2. Determinare l'insieme $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x, y, z) = (2, 4)\}$.
3. T è suriettiva? T è iniettiva?
4. Trovare un'*inversa destra* di A, cioè una matrice B tale che il prodotto $A \cdot B = I$ è la matrice identità.

1) La matrice associata e' $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e' già in forma ridotta

$$\begin{array}{ccc} P & P & L \end{array}$$

T e' suriettiva perche' la matrice associata ha un numero di pivot = numero di righe

T non e' iniettiva perche' la matrice associata ha variabili libere.

2) Devo trovare le soluzioni di $(*)\begin{cases} -x+3y+2z = 2 \\ -y+z = 4 \end{cases}$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} P & P & L \end{array} \end{array}$$

Una soluzione particolare si può trovare ponendo la variabile libera $z=0$

$$\begin{cases} -x+3y=2 \Rightarrow -x-12=2 \Rightarrow x=-14 \\ -y=4 \Rightarrow y=-4 \end{cases}$$

$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} -14 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ e' una soluzione particolare del sistema $(*)$

Una base del nucleo si trova prendendo le soluzioni speciali del sistema omogeneo associato.

$$\begin{cases} -x+3y+2z=0 \\ -y+z=0 \end{cases}$$

Si pone la variabile libera $z=1$ e si ottiene

$$\begin{cases} -x+3y+2=0 & \Rightarrow -x+3+2=0 \Rightarrow x=5 \\ -y+1=0 & \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

$\vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è l'unica soluzione speciale,

quindi $\ker T$ ha come base $\vec{s}$.

L'insieme $\mathcal{S}$ si trova quindi così:

$$\mathcal{S} = \{ \vec{x}_p + \vec{v} \mid \vec{v} \in \ker T \} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -14 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

4) Cerchiamo una matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$

tale che

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deve quindi essere:

$$\begin{cases} -a + 3c + 2e = 1 \\ -b + 3d + 2f = 0 \\ -c + e = 0 \\ -d + f = 1 \end{cases}$$

Questo sistema ha certamente soluzioni.

Ad esempio, imponendo per semplicita' $c = d = 0$ si ottiene

$$\begin{cases} -a + 2e = 1 & \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1 \\ -b + 2f = 0 & \Rightarrow -b + 2 = 0 \Rightarrow b = 2 \\ e = 0 \\ f = 1 \end{cases}$$

Quindi la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ soddisfa le proprieta' richieste.

Esercizio 3. [10 pt.]
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica.

2. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.

3. Determinare una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $D = S^{-1}AS$.

1) $$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sviluppo lungo la II colonna}}$$

$$(-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II riga}]{\text{sviluppo secondo la}} (-1-\lambda) \cdot (-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)^2 \cdot \left[(-3-\lambda)(2-\lambda) + 6 \right] = (\lambda+1)^2 (-\cancel{6} + 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + \cancel{6})$$

$$= (\lambda+1)^2 (\lambda^2 + \lambda) = \lambda(\lambda+1)^3$$

$\lambda = 0$ autovalore di molt. alg. 1

$\lambda = -1$ autovalore di molt. alg. 3

Scansionato con CamScanner

2) $\underline{\lambda = 0}$ $\quad Aut_A(0) = \ker(A - \lambda I) = \ker A$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I e II}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}+3\text{I}]{\text{II}-3\text{I}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}+\text{II}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

La soluzione speciale si ottiene ponendo la variabile libera $x_4 = 1$ nel sistema ridotto:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \quad -x_4 = 0 & \Rightarrow -x_1 + \frac{1}{3} - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{2}{3} \\ 3x_2 \quad +x_4 = 0 & \Rightarrow 3x_2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{3} \\ -x_3 = 0 & \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = 0$

e $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1\}$ è una base di $Aut_A(0)$

$\underline{\lambda = -1}$ $\quad Aut_A(-1) = \ker(A + 1 \cdot I) =$

$$= \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I e II}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+3\text{I}]{\text{II}-2\text{I}}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & L & L & L \end{array} \end{array}$$

Ci sono tre variabili libere, dunque l'autospazio $Aut_A(-1)$ ha dimensione 3

Troviamone una base individuando le 3 soluzioni speciali.

$x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ $\quad \{ -x_1 \quad -x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \qquad S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ $\quad \{ -x_1 \quad -x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ $\quad \{ -x_1 \quad -x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \qquad S_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Quindi $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $Aut_A(-1)$.

Scansionato con CamScanner

3) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e'

una base di autovettori. La matrice invertibile "cambio di base" S e' la seguente:

$$S = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 0 & -1 \\ -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e si ha che il prodotto

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e' la matrice diagonale avente gli autovettori sulla diagonale.

Esercizio 4. [6pt.]

1. Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:
   - Il vettore $v_1 = (0, 1, 0)$ è un autovettore con autovalore 3,
   - Il vettore $v_2 = (1, 1, 1)$ è un autovettore con autovalore 1,
   - f non è invertibile.
2. Scrivere la matrice A associata a f rispetto alla base canonica.
3. Esiste un'unica applicazione lineare f che soddisfa le proprietà (1)? Se sì, motiva la risposta; se no, mostra due esempi distinti di appl. lineari che soddisfano (1).

1e2) Vista la prima condizione, $f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$

Inoltre $f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

La matrice A associata ad f rispetto alla base canonica ha come seconda colonna $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$, visto che $f(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$.

Inoltre $f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ci dice che la prima colonna, sommata alla seconda colonna, sommata alla terza colonna dà come risultato $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$A = \left(\vec{c}_1 \;\middle|\; \begin{matrix}0\\3\\0\end{matrix} \;\middle|\; \vec{c}_3 \right)$$

Per avere f NON invertibile basta ad esempio porre $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. In questo caso, per soddisfare la condizione precedente, dobbiamo porre $\vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ soddisfa le proprieta' richieste

<u>N.B.</u> Per rispondere soltanto alla domanda 1) bastava osservare che $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e' una base di $\mathbb{R}^3$. Ricordiamo che un'appl. lineare e' univocamente determinata dai suoi valori su una base. Nel nostro caso, un'appl. lineare che soddisfa le proprieta' richieste e' quella tale che:

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In questo modo $\ker f \neq \{0\}$ e f NON invertibile

3) No, la f richiesta NON è unica.

Ad esempio, scambiando la prima e la terza colonna di A otteniamo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Anche l'appl. lineare g la cui matrice associata rispetto alla base canonica è B soddisfa le proprietà richieste, e chiaramente $f \neq g$ (ad esempio $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ e $g\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$)