Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Test di Geometria

Tempo a disposizione: 20 minuti

24 Giugno 2024

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -2**

	V	F
1) Se $X = \{2n+1 \mid 1 \le n \le 5\}$ e $Y = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ allora $X \cap Y$ contiene un unico elemento.	☒	☐
2) L'equazione complessa $e^z = 0$ ha infinite soluzioni.	☐	☒
3) Se l'appl. lin. associata alla matrice A è iniettiva allora ogni sistema lineare $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ha al più una soluzione.	☒	☐
4) Se $z = -1 + i$ allora $\frac{2z}{z+\bar{z}} = 1 - i$.	☒	☐
5) Se il prodotto di due matrici $A \cdot B$ è invertibile, allora sia A che B sono invertibili.	☒	☐
6) Se una matrice 2×2 ha un unico autovalore reale, allora non è diagonalizzabile.	☐	☒
7) Se una matrice ha due righe uguali allora non è invertibile.	☒	☐
8) Il prodotto di due matrici ortogonali è una matrice ortogonale†.	☒	☐
9) Siano $f, g : X \to X$ due funzioni. Allora $\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.	☐	☒
10) I vettori $v_1 = (-3, 2)$, $v_2 = (1, -1)$ e $v_3 = (-2, 1)$ formano una base di $\mathbb{R}^2$.	☐	☒
11) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.	☐	☒
12) Uno spazio vettoriale non può avere basi di cardinalità diverse.	☒	☐

($\dagger$) Una matrice A è ortogonale se è invertibile e la sua inversa coincide con la trasposta: $A^{-1} = {}^tA$.

Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

24 Giugno 2024
tempo a disposizione : 120 minuti

Per essere considerate valide, le risposte devono essere giustificate

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. [6 pt.]
Trovare tutte le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$z^5 \;=\; -16\,\overline{z}.$$

$z = (\rho, \theta)$.

$z^5 = (\rho^5, 5\theta)$; $\overline{z} = (\rho, -\theta)$; $-16 = (16, \pi)$

$\Rightarrow -16\,\overline{z} = (16\rho, \pi - \theta)$. Dunque

$$z^5 = -16\,\overline{z} \iff \begin{cases} \rho^5 = 16\rho \\ 5\theta = \pi - \theta + 2k\pi \iff 6\theta = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$\rho = 0$ oppure $\rho = 2$

$\theta = \pi/6 + k\,\pi/3$

Le soluzioni scritte in coordinate polari sono:

$z_0 = (0,0)$; $z_1 = (2, \pi/6)$; $z_2 = (2, \pi/2)$; $z_6 = (2, \frac{11}{6}\pi)$

$z_3 = (2, \frac{5}{6}\pi)$; $z_4 = (2, \frac{7}{6}\pi)$; $z_5 = (2, \frac{3}{2}\pi)$

In coordinate cartesiane:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = 2\left(\cos \pi/6 + i \sin \pi/6\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2\left(\cos \pi/2 + i \sin \pi/2\right) = 2i$$

$$z_3 = 2\left(\cos 5/6\,\pi + i \sin 5/6\,\pi\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_4 = 2\left(\cos 7/6\,\pi + i \sin 7/6\,\pi\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$z_5 = 2\left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi\right) = -2i$$

$$z_6 = 2\left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi\right) = \sqrt{3} - i$$

Esercizio 2. [10 pt.]
Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f(x, y) = (-x, 3x - y, 2x + y)$$

1. Determinare la matrice A associata a f rispetto alla base canonica.
2. Verificare che f è iniettiva e determinare un'inversa sinistra di A.
3. La matrice A ammette inversa destra? (Giustificare la risposta).
4. Determinare l'insieme $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (-1, 0, 5)\}$.

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2) Riduco $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+2\text{I}]{\text{II}+3\text{I}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ P P

f è iniettiva perché la matrice associata non ha variabili libere.

Cerco un'inversa sinistra $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \eta \end{pmatrix}$ t.c.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta + 2\gamma = 1 \\ -\beta + \gamma = 0 \\ -\delta + 3\varepsilon + 2\eta = 0 \\ -\varepsilon + \eta = 1 \end{cases}$$

Non è necessario trovare tutte le inverse sinistre, qui è sufficiente trovare una soluzione.

Ad esempio, per semplificare, poniamo

$\beta = \gamma = \eta = 0$. Si ottiene:

$-\alpha + 0 + 0 = 1 \Rightarrow \alpha = -1$

$-0 + 0 = 0$

$-\delta + 3\varepsilon + 0 = 0 \Rightarrow \delta = 3\varepsilon \Rightarrow \delta = -3$

$-\varepsilon + 0 = 1 \Rightarrow \varepsilon = -1$

$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ è un'inversa sinistra

3) La matrice A <u>non</u> ammette inversa destra perchè l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ <u>non</u> è suriettiva.

4) Devo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} -x = -1 \\ 3x - y = 0 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}+2\text{I}]{\text{II}+3\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+\text{II}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} -x = -1 \\ -y = -3 \end{cases}$$

La soluzione, è unica, è $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

quindi $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ contiene un solo vettore.

Esercizio 3. [10 pt.]
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica.
2. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.
3. Determinare una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $D = S^{-1}AS$.

1) $$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

Calcolo il determinante sviluppando lungo la prima colonna:

$$(-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & +2-\lambda & 0 \\ 0 & -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda) \cdot (-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-\lambda)(-1-\lambda)\left[(2-\lambda)(-1-\lambda) - 0\right] = (-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$

$$= \lambda(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

$\lambda = 0$ autov. con m.a. 1
$\lambda = -1$ autov. con m.a. 2
$\lambda = 2$ autov. con m.a. 1

2)

$\underline{\lambda=0}$ $\quad A-\lambda I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

Si vede subito che $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(A-\lambda I)$

Inoltre, visto che $\lambda=0$ ha m.e. 1, anche la molt. geometrica deve essere 1, e quindi

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } \mathrm{Aut}(A, 0)$$

$\underline{\lambda=-1}$ $\quad A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio II e IV}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+II} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & L & P & L \end{matrix} \end{array}$$

Le variabili libere sono x_2 e x_4.

Troviamo le due soluzioni speciali:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ \quad\quad -3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x_2 = 1 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \\ -3x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_4 = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 0 - x_3 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \\ -3x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -1$ ha molt. geometrica 2 e una base di $Aut(A, -1)$ è $\left\{ V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\underline{\lambda = 2}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III e IV}]{\text{scambio}}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

x_4 è la variabile libera

Troviamo la soluzione speciale.

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_2 = 0 \\ -3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \qquad x_4 = 1$$

$x_2 = 0$; $-3x_3 - 3 = 0 \Rightarrow x_3 = -1$

$-2x_1 - 0 + 2 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$\left\{ v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $Aut(A, 2)$

3) $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di autovettori, quindi la matrice A è diagonalizzabile

Se $S = (v_1 | v_2 | v_3 | v_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

è la matrice "cambio di base", si ha che

$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è la matrice diagonale

che ha gli autovalori di v_1, v_2, v_3, v_4 nell'ordine sulla diagonale.

Esercizio 4. [6pt.]

1. Trovare un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che non è invertibile e dove $v_1 = (0, 1, 0)$ e $v_2 = (1, 1, 0)$ sono autovettori di autovalore $\lambda = -3$.
2. Determinare la matrice associata a T rispetto alla base canonica.
3. Esiste un'unica applicazione lineare T che soddisfa le proprietà (1)? Se sì, motiva la risposta; se no, mostra due esempi distinti di appl. lineari che soddisfano (1).

1) Visto che T non e' invertibile, $\ker T \neq \{0\}$ e $\lambda = 0$ e' un suo autovalore.

Ad esempio, si ottiene una T con le proprieta' richieste imponendo che

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = -3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}$$

e $$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix}.$$

Notiamo che $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$, quindi T e' ben definita.

2) Per determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica, ricordiamo che

$$A = \left(T(e_1) \,\middle|\, T(e_2) \,\middle|\, T(e_3) \right)$$

Gia' sappiamo che $T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $T(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Notiamo ora che

$$T(e_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) No, non esiste un'unica appl. lineare che soddisfa le proprieta' richieste. Ad esempio anche $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ le soddisfa.