

Esercizio 2. [10 pt.]

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f(x, y) = (-x, 3x - y, 2x + y)$$

1. Determinare la matrice A associata a f rispetto alla base canonica.
2. Verificare che f è iniettiva e determinare un'inversa sinistra di A .
3. La matrice A ammette inversa destra? (Giustificare la risposta).
4. Determinare l'insieme $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (-1, 0, 5)\}$.

Esercizio 3. [10 pt.]

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica.
2. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.
3. Determinare una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $D = S^{-1}AS$.

Esercizio 4. [6pt.]

1. Trovare un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che non è invertibile e dove $v_1 = (0, 1, 0)$ e $v_2 = (1, 1, 0)$ sono autovettori di autovalore $\lambda = -3$.
2. Determinare la matrice associata a T rispetto alla base canonica.
3. Esiste un'unica applicazione lineare T che soddisfa le proprietà (1)? Se sì, motiva la risposta; se no, mostra due esempi distinti di appl. lineari che soddisfano (1).