SOLUZIONI compito 15/2/2021

Esercizio 1

1 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -4 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{II+2I} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} P & L & P & L \end{array} \end{array}$$

x_2 e x_4 sono variabili libere

Una soluzione particolare si può trovare ponendo le variabili libere $x_2 = x_4 = 0$

sistema ridotto $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 2 \ \& \\ x_1 - 0 + 6 + 0 = 1 \rightarrow x_1 = -5 \end{array}$

$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una soluzione particolare.

Troviamo ora le soluzioni speciali del sistema omogeneo associato.

$\begin{array}{l} x_2 = 1 \\ x_4 = 0 \end{array} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 0 \ \& \\ x_1 - 1 + 0 + 0 = 0 \\ x_1 = 1 \end{array} \quad \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_4 = 1 \end{array} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 0 \ \& \\ x_1 - 0 + 0 + 2 = 0 \end{array} \quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ \ldots \end{pmatrix}$

$x_4 = 1$ $\quad$ $x_1 = -2$

Il nucleo dell'applicazione lineare T associata al sistema lineare ha come base $\{\vec{s}_1, \vec{s}_2\}$, dunque $\ker T = \mathrm{Span}\{\vec{s}_1, \vec{s}_2\}$.

L'insieme delle soluzioni del sistema iniziale è

$$\mathcal{S} = \{\vec{x}_p + \vec{v} \mid \vec{v} \in \ker T\} = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(2)

$$A = \left(Te_1 \,\middle|\, Te_2 \,\middle|\, Te_3 \,\middle|\, Te_4 \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

$$\bar{z} \cdot z^3 + 16i = 0$$
$$\bar{z} \cdot z^3 = -16i$$

$z = (\rho, \theta) \Rightarrow z^3 = (\rho^3, 3\theta)$ e $\bar{z} = (\rho, -\theta) \Rightarrow \bar{z} \cdot z^3 = (\rho^4, 2\theta)$

$-16i = (16, \frac{3}{2}\pi)$. Quindi:

$\{ \rho^4 = 16 \Rightarrow \rho = 2$

$$\begin{cases} \rho^2 = 16 \Rightarrow \rho = 2 \\ 2\theta = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{3}{4}\pi + k\pi = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \dots \text{ (poi si ripete)} \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

$$z_1 = \left(2, \tfrac{3}{4}\pi\right) = 2\left(\cos \tfrac{3}{4}\pi + i \sin \tfrac{3}{4}\pi\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_2 = \left(2, \tfrac{7}{4}\pi\right) = 2\left(\cos \tfrac{7}{4}\pi + i \sin \tfrac{7}{4}\pi\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

Esercizio 2

1. $$A - \lambda I = \begin{pmatrix} \cancel{3-\lambda} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 4 & 3-\lambda & 4 & -4 \\ -4 & -2 & -3-\lambda & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \overset{\text{sviluppo lungo la I riga}}{=} (3-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 & -4 \\ -2 & -3-\lambda & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1-\lambda} \end{pmatrix} \overset{\text{sviluppo secondo la III riga}}{=} (3-\lambda)(1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -2 & -3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(3-\lambda)(1-\lambda)\left[(3-\lambda)(-3-\lambda) + 8\right] = (3-\lambda)(1-\lambda)(\lambda^2 - 9 + 8) = (3-\lambda)(1-\lambda)(\lambda^2 - 1) =$$

$$= (3-\lambda)(1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda+3).$$ Dunque

$\lambda = 1$ e' autovalore con m.a. $= 2$

$\lambda = -1$ e' autovalore con m.a. $= 1$

$\lambda = -3$ e' autovalore con m.a. $= 1$

2. $\lambda = 1$ $\quad A - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & -4 \\ \dots \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 2I} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 4 & -4 \\ \dots \end{pmatrix} \xrightarrow{III + II}$

$\underline{\lambda = 1}$ $\quad A - 1 \cdot I = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -4 & -2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III + 2I \\ IV - I}]{} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV + \frac{1}{4} II} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & L \end{matrix} \end{array}$$

Ci sono due variabili libere, cioè x_3 e x_4.

Quindi $\dim(\ker(A - 1 \cdot I)) = 2$, cioè la m.g. dell'autovalore $\lambda = 1$ è 2

Troviamo le soluzioni speciali:

$x_3 = 1$, $x_4 = 0$:
$$\begin{cases} 2x_1 = 0 & \Rightarrow \quad x_1 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0 & \Rightarrow \quad 2x_2 + 4 - 0 = 0 \Rightarrow x_2 = -2 \end{cases} \qquad \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 0$, $x_4 = 1$:
$$\begin{cases} 2x_1 = 0 & \Rightarrow \quad x_1 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0 & \Rightarrow \quad 2x_2 + 0 - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases} \qquad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = -1}$ $\quad A + 1 \cdot I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & -4 \\ -4 & -2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III + I \\ IV - \frac{1}{2} I}]{II - I} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + \frac{1}{2} II}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV - III} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & P \end{matrix} \end{array}$$

C'è una variabile libera, cioè x_3

$\begin{cases} 4x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \end{cases}$ $\qquad \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix}$

$x_3 = 1 \quad \begin{cases} 4x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0 & \Rightarrow 4x_2 + 4 - 0 = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \\ 2x_4 = 0 & \Rightarrow x_4 = 0 \end{cases} \quad \vec{S} = \begin{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = 3}$

$$A - 3 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & -4 \\ -4 & -2 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I} \leftrightarrow \text{IV}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 4 & -4 \\ -4 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+2\text{I}]{\text{II}-2\text{I}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II} \leftrightarrow \text{III}]{\text{scambio}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

C'è una variabile libera, cioè x_4

$x_4 = 1 \quad \begin{cases} 2x_1 - 2x_4 = 0 & \Rightarrow 2x_1 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \\ 2x_2 + 6x_3 = 0 & \Rightarrow 2x_2 + 0 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ 4x_3 = 0 & \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases} \quad \vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Quindi:

- Una base di $Aut_A(1)$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$
- Una base di $Aut_A(-1)$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- Una base di $Aut_A(3)$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(3)

Una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Quindi considerando la matrice "cambio di base"

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ si ottiene la "diagonalizzazione"

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Esercizio 4</u> Per avere la proprietà 1 imponiamo che $f(\vec{v}) = 0$ per un vettore $\vec{v} \neq 0$. In questo modo f sarà non iniettiva, quindi non invertibile.

Ad esempio prendiamo $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e imponiamo $f(\vec{v}_1) = 0$. La condizione 2 dice che il vettore $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e' autovettore di autovalore $\lambda = -2$.

Visto che $\vec{v}_1$ e' un autovettore di autovalore $\lambda = 0$, per ottenere anche la proprietà 3 basta completare l'insieme $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ ad una BASE $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ dove anche il vettore $\vec{v}_3$ sia autovettore.

Ad esempio prendiamo $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$ e imponiamo $f(\vec{v}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$, in modo

Ad esempio prendiamo $v_3 =$ [illegible]

che $\vec{v}_3$ sia autovettore di autovalore $\lambda = 1$.

Notiamo che $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e' in effetti una base perche'

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0 .$$

Calcoliamo f sui vettori della base canonica. Già sappiamo che $f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e che $f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calcoliamo le coordinate di e_2 rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Senza bisogno di riduzione di Gauss, troviamo facilmente la soluzione $\lambda_1 = \frac{1}{2}$; $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$; $\lambda_3 = 0$. Dunque $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, e per le proprietà di applicazione lineare:

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f\left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} f\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Infine:

$$A = \left(f(e_1) \,\middle|\, f(e_2) \,\middle|\, f(e_3) \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un modo alternativo di ricavare la matrice A e' il seguente.

Sappiamo che $S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dove $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e' la matrice cambio di base rispetto alla base di autovettori $\mathcal{B}$.

Allora se $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, da $S^{-1} A S = D$ si ricava $A = S D S^{-1}$.