SOLUZIONI

Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria - A

8 Gennaio 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Tutte le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ sono iniettive.	☐	☒
2) Se A è una matrice invertibile allora ha un autovalore reale $\lambda \neq 0$.	☐	☒
3) Se $V, W \subseteq \mathbb{R}^{11}$ sono due sottospazi di dimensione 5, allora $V + W \neq \mathbb{R}^{11}$.	☒	☐
4) L'inversa di una matrice ortogonale è ortogonale.	☒	☐
5) La funzione esponenziale complessa $z \mapsto e^z$ è iniettiva.	☐	☒
6) Se v è autovettore sia di A che di B allora v è autovettore anche del prodotto AB.	☒	☐
7) Se $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } x = n^2\}$ e $B = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ t.c. } y = 3m\}$ allora $A \cap B = \emptyset$.	☐	☒
8) Le coordinate del vettore $(-1, 2)$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,3),(2,1)\}$ sono $(1, -1)$.	☒	☐

ATTENZIONE: La seconda parte del test è sul retro di questo foglio.

SECONDA PARTE

PUNTEGGIO : **risposta mancante o errata = 0;**	**risposta esatta = +2.5;**

1) Dati i numeri complessi $z = 3 + i$ e $w = 1 - 2i$, scrivere in forma cartesiana il numero

$$\frac{(\overline{z})^2}{w \cdot i}$$

RISPOSTA:

$2 - 4i$

2) Applicando il metodo di Gauss-Jordan, trovare l'inversa A^{-1} della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

3) Trovare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ che include il vettore $v_1 = (-1, 1, 2)$.

RISPOSTA:

$\mathcal{B} = \{(-1,1,2), (1,1,0), (1,-1,1)\}$

4) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

trovare la sua inversa destra B che ha tutti zero nella seconda riga.

RISPOSTA:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUZIONI

Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria - B

8 Gennaio 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
1) Se v_1 e v_2 sono autovettori di una matrice A allora anxche $v_1 + v_2$ è autovettore di A.	☐	☒
2) La funzione esponenziale complessa $z \mapsto e^z$ è suriettiva.	☐	☒
3) Nessuna applicazione lineare $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ è iniettiva.	☒	☐
4) Una matrice ortogonale è simmetrica.	☐	☒
5) Se A è una matrice quadrata non invertibile allora ha come autovalore $\lambda = 0$.	☒	☐
6) Le coordinate del vettore $(-1, -4)$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(2, -3), (3, 1)\}$ sono $(1, -1)$.	☒	☐
7) Se $V, W \subseteq \mathbb{R}^9$ sono due sottospazi di dimensione 5, allora $V + W = \mathbb{R}^9$.	☐	☒
8) Se $X = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ t.c. } x = 3k\}$ e $Y = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists h \in \mathbb{N} \text{ t.c. } y = 2h - 1\}$ allora $X \cap Y = \emptyset$.	☐	☒

ATTENZIONE: La seconda parte del test è sul retro di questo foglio.

SECONDA PARTE

PUNTEGGIO : **risposta mancante o errata = 0;**	**risposta esatta = +2.5;**

1) Dati i numeri complessi $z = 2 - i$ e $w = 1 - 3i$, scrivere in forma cartesiana il numero

$$\frac{(\bar{z})^2}{w \cdot i}$$

RISPOSTA:

$$\frac{13}{10} + \frac{9}{10} i$$

2) Applicando il metodo di Gauss-Jordan, trovare l'inversa A^{-1} della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

3) Trovare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ che include il vettore $v_1 = (1, -2, 1)$.

RISPOSTA:

$$\mathcal{B} = \{ (1, -2, 1), (1, 0, -1), (1, 1, 1) \}$$

4) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

trovare la sua inversa sinistra B che ha tutti zero nella seconda colonna.

RISPOSTA:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

8 Gennaio 2018
tempo a disposizione : 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. [6 pt.]
Determinare le soluzioni complesse dell'equazione

$$8z^3 + i = 0$$

$8z^3 + i = 0 \iff z^3 = -\frac{i}{8}$

$-\frac{i}{8}$ ha modulo $\rho = \frac{1}{8}$ e argomento $\theta = \frac{3}{2}\pi \simeq -\frac{\pi}{2}$

$z \to (\rho, \theta) \Rightarrow z^3 = (\rho^3, 3\theta)$.

Dunque $\begin{cases} \rho^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \rho = \sqrt[3]{1/8} = 1/2 \\ 3\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \theta = -\pi/6 + 2k\pi/3 \end{cases}$

$k=0 \Rightarrow \theta = -\pi/6$; $k=1 \Rightarrow \theta = -\pi/6 + 2\pi/3 = \frac{-1+4}{6}\pi = \pi/2$

$k=2 \Rightarrow \theta = -\pi/6 + 4\pi/3 = \frac{-1+8}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$

Le tre soluzioni sono:

$z_1 \to \left(\frac{1}{2}, -\pi/6\right) \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6)\right) =$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}$

$z_2 \to \left(\frac{1}{2}, \pi/2\right) \Rightarrow z_2 = \frac{1}{2}i$

$z_3 \to \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{6}\pi\right) \Rightarrow z_3 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) =$
$-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}$

Esercizio 2. [12 pt.]
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo:

$$f(x, y, z) = (2x + 3y - z, -x - z, 3x + 2y + z)$$

(a) Si determini la matrice A associata a f.

(b) Si determini la dimensione e una base dell'immagine di f.

(c) Si determini la dimensione e una base del nucleo di f.

(d) Trovare tutti i vettori $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(x, y, z) = (-3, -3, 3)$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{I e II}]{\text{scambio}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{III}+3\text{I}]{\text{II}+2\text{I}}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III}-\frac{2}{3}\text{II}} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} p & p & L \end{matrix} \end{array}$$

2 colonne pivot $\Rightarrow$ l'immagine ha dimensione 2
1 colonna libera $\Rightarrow$ il nucleo ha dimensione 1

Una base dell'immagine è data dalle colonne pivot della matrice iniziale A, cioè $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Una base del nucleo si trova ponendo l'unica variabile libera $z = 1$ nel sistema ridotto:

$$\begin{cases} -x - z = 0 & \Rightarrow -x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ 3y - 3z = 0 & \Rightarrow 3y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dobbiamo ora trovare tutte le soluzioni di

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

~~Riduco, stavolta con la colonna dei termini noti:~~

Devo trovare una soluzione particolare: Un modo semplice è porre la variabile libera $z = 0$

$$\begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ -x = -3 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = 3 \\ 6 + 3y = -3 \Rightarrow y = -3 \\ 9 - 6 = 3 \ \underline{\underline{\text{ok}}} \end{array}$$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una soluzione particolare

L'insieme di tutte le soluzioni è

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{w} \;\middle|\; \vec{w} \in \ker f \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3 - \lambda \\ -3 + \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Esercizio 3. **[10 pt.]**

Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori di A nel campo complesso.

(b) Nel campo complesso, trovare una matrice diagonale D e una matrice invertibile S tali che $S^{-1} \cdot A \cdot S = D$.

Il polinomio caratteristico è $\det(A - \lambda I) =$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$$

Due autovalori complessi e distinti $-2i, 2i$

- Autospazio $(A, -2i) = \ker(A + 2i\,I) =$

$$\ker \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -4 & 2i \end{pmatrix}. \quad \text{Riduco: } \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -4 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 2i\,I} \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} P & L \end{array}$$

Variabile libera $x_2 = 1$. $\quad 2i x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow$

$$2i\, x_1 + 1 = 0 \Rightarrow 2i x_1 = -1 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2i} = \frac{1}{2} i$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ è autovettore di autovalore } \lambda = -2i$$

- Autospazio $(A, 2i) = \ker(A - 2i\,I) =$

$$\ker \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix}. \quad \text{Riduco: } \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow{II + 2i\,I} \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} P & L \end{array}$$

Variabile libera $x_2 = 1$. $\quad -2i x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow$

$-2i\, x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2} i$

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} i \\ 1 \end{pmatrix}$ e' autovettore di autovalore $\lambda = 2i$

$\mathcal{B} = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \}$ base di autovettori.

$$S = \left(\vec{v}_1 \middle| \vec{v}_2 \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} i & -\frac{1}{2} i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e' una matrice invertibile (matrice "cambio di base") tale che

autovalori

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} = D \quad \text{diagonale.}$$

Non e' richiesto dal testo dell'esercizio, ma si può calcolare che $S^{-1} = \begin{pmatrix} -i & \frac{1}{2} \\ i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

N.B. Se si scambia l'ordine degli autovettore e

$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} i & \frac{1}{2} i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ allora $S^{-1} = \begin{pmatrix} i & \frac{1}{2} \\ -i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. [6pt.]
Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ dove $V = \text{span}\{(-2,1,1),(1,2,-4)\}$. Trovare una base dello spazio ortogonale $V^\perp$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V^\perp \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x+2y-4z=0 \end{cases}$$

Dunque $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V^\perp \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Riduco: $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio I e II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}+2\text{I}}$

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix} \\ p \quad p \quad L \end{array}$$

Pongo la variabile libera $z=1$ ed ottengo

$$\begin{cases} x+2y-4=0 \\ 5y-7=0 \Rightarrow y=7/5 \end{cases}$$

$x + 14/5 - 4 = 0 \Rightarrow x = 6/5$

Dunque
$V^\perp = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 6/5 \\ 7/5 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ e $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 6/5 \\ 7/5 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ e' la base cercata.