fila A

Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria

15 Febbraio 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ sono due funzioni iniettive, allora anche $g \circ f$ è iniettiva.	☒	☐
2) Una matrice 3×3 ha al più 3 autovalori.	☒	☐
3) Siano A, B matrici $n \times n$. Se $\det(AB) = 0$, allora A non è invertibile.	☐	☒
4) Se una matrice 2×2 è diagonalizzabile allora ha 2 autovalori distinti.	☐	☒
5) $(1 - 2i)^2(1 + 2i)^2$ è un numero reale.	☒	☐
6) Se $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo, anche $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ è soluzione.	☒	☐
7) Se $A = \{5y \mid y \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N} \cap [-10, 10]\}$ allora $A \cap B$ contiene due elementi.	☒	☐
8) L'unione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale.	☐	☒

Attenzione! Riguardo l'Esercizio 7, ricordare che $0 \notin \mathbb{N}$.

ATTENZIONE: La seconda parte del test è sul retro di questo foglio.

SECONDA PARTE

PUNTEGGIO : **risposta mancante o errata = 0; risposta esatta = +2.5;**

1) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ trovare la sua inversa destra B che ha tutti zero nella terza riga.

RISPOSTA:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Dati i numeri complessi $z = 1 - i$ (scritto in forma cartesiana) e il numero complesso $w = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ (scritto in coordinate polari), calcolare e scrivere sia in forma cartesiana che in coordinate polari il seguente numero:

$$\frac{w^{298}}{z^{300}}$$

RISPOSTA:

cartesiana: $-i\frac{1}{2}$

polare: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$

3) Trovare una base del seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 8y + 3z = 0\}.$$

RISPOSTA:

$$B = \{(4, 1, 0), (-\tfrac{3}{2}, 0, 1)\}$$

4) Applicando il metodo di Gauss-Jordan, trovare l'inversa A^{-1} della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I

1/12

fila B

Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria

15 Febbraio 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Se una matrice 2×2 non è diagonalizzabile allora non ha 2 autovalori distinti.	☒	☐
2) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo, allora anche $\lambda\mathbf{x}$ è soluzione.	☒	☐
3) Se $T : A \to B$ e $S : B \to C$ sono due funzioni suriettive, allora anche $S \circ T$ è suriettiva.	☒	☐
4) Se $X = \{y^2 \mid y \in \mathbb{N} \cap [-6, 6]\}$ e $Y = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ allora $X \cap Y$ contiene due elementi.	☐	☒
5) Una matrice 4×4 ha almeno 2 autovalori.	☐	☒
6) L'intersezione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale.	☒	☐
7) $(i + 2)^2(i - 2)^2$ è un numero reale.	☒	☐
8) Siano A, B matrici $n \times n$. Se $\det(AB) \neq 0$, allora A è invertibile.	☒	☐

Attenzione! Riguardo l'Esercizio 4, ricordare che $0 \notin \mathbb{N}$.

ATTENZIONE: La seconda parte del test è sul retro di questo foglio.

SECONDA PARTE

PUNTEGGIO : **risposta mancante o errata = 0;**	**risposta esatta = +2.5;**

1) Trovare una base del seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 0\}.$$

RISPOSTA:

$B = \{(-2, 1, 0), (\frac{7}{3}, 0, 1)\}$

2) Applicando il metodo di Gauss-Jordan, trovare l'inversa A^{-1} della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ trovare la sua inversa destra B che ha tutti zero nella terza riga.

RISPOSTA:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Dati il numeri complesso $z = 1 + i$ (scritto in forma cartesiana) e il numero complesso $w = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ (scritto in coordinate polari), calcolare e scrivere sia in forma cartesiana che in coordinate polari il seguente numero:

$$\frac{\overline{z}^{298}}{w^{300}}$$

RISPOSTA:

cartesiana : $i\frac{1}{2}$

polare : $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$

Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

15 Febbraio 2017 – tempo a disposizione : 120 minuti

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1. [6 pt.] Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$9z^3 = \overline{z}$$

In coordinate polari, se $z = (\rho, \theta)$ allora

$9z^3 = (9\rho^3, 3\theta)$ e $\overline{z} = (\rho, -\theta)$.

Da $9z^3 = \overline{z}$, cioè $(9\rho^3, 3\theta) = (\rho, -\theta)$ segue che

$9\rho^3 = \rho \Rightarrow \rho = 0$ o $\rho = \frac{1}{3}$ e

$3\theta = -\theta + 2k\pi \Rightarrow \theta = k \cdot \frac{\pi}{2}$

Le soluzioni sono $z_0 = 0$, $z_1 = (\frac{1}{3}, 0)$;

$z_2 = (\frac{1}{3}, \frac{\pi}{2})$; $z_3 = (\frac{1}{3}, \pi)$; $z_4 = (\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\pi)$.

In coordinate cartesiane:

$z_0 = 0$; $z_1 = \frac{1}{3}$; $z_2 = \frac{1}{3}i$; $z_3 = -\frac{1}{3}$; $z_4 = -\frac{1}{3}i$

Esercizio 2. [9 pt.] Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$T(x,y) = (x, 2x - y, 3x + y)$$

1. Determinare la matrice A associata a T.
2. Verificare che T è iniettiva e determinare un'inversa sinistra di A.
3. La matrice A ammette inversa destra? (Giustificare la risposta).
4. Determinare l'insieme $X = T^{-1}(1,0,5) = \{(x,y) \mid T(x,y) = (1,0,5)\}$.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

2. Riduco: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} p & p \end{array} \end{array}$

Nessuna colonna libera $\Rightarrow$ $\ker A = \{0\}$ e T iniettiva

$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ è inversa sinistra $\Longleftrightarrow$

$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} a + 2b + c = 1 \\ -b + c = 0 \\ d + 2e + 3f = 0 \\ -e + f = 1 \end{cases}$$

Questo è un sistema che ha infinite soluzioni. Ad esempio, per semplicità poniamo $b = e = 0$ (zeri nella II riga di B) ed otteniamo

$$\begin{cases} a+c=1 & \Rightarrow \quad a=1 \\ c=0 & \\ d+3f=0 & \Rightarrow \quad d=-3 \\ f=1 & \end{cases}$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

è un'inversa sinistra di A.

3. T <u>NON</u> è suriettiva. Infatti la matrice associata ha 2 colonne pivot $\Rightarrow \dim(Im(T))=2$ e quindi <u>NON</u> può essere $Im(T)=\mathbb{R}^3$.

Quindi la matrice associata A <u>NON</u> ha inversa destra.

4. L'insieme X contiene tutte le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2x - y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

Una soluzione particolare è $x=1$, $2-y=0 \Rightarrow y=2$ e $3+2=5$ ok

$$x_p=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

L'insieme di tutte le soluzioni si ottiene considerando tutte le somme x_p+v dove $v \in \ker T$.

Ma $\ker(T)=\{0\}$ perché T è iniettiva, e dunque $x_p=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è l'UNICA soluzione.

Esercizio 3. [12 pt.] Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_3, 5x_1 + x_2 + 5x_3, x_3, x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 3x_4)$$

1. Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di T.
2. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.
3. Determinare se T è diagonalizzabile e, nel caso lo sia, determinare la sua forma diagonale.
4. Determinare un vettore di $\mathbb{R}^4$ che non sia un autovettore.

1. La matrice associata a T (rispetto alla base canonica) è:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico si ottiene come

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1-\lambda & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -6 & 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (\text{sviluppo secondo la IV colonna}) = (3-\lambda) \cdot \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 5 & 1-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (\text{sviluppo secondo la III colonna}) = (3-\lambda)(1-\lambda) \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 5 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(1-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda) - 0\right] = (3-\lambda)(1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

$\lambda = 3$ autovalore di molt. algebrica 1

$\lambda = 1$ autovalore di molt. algebrica 2

$\lambda = 2$ autovalore di molt. algebrica 1

② $Aut(A,3) = \ker(A-3I) =$

$$= \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Visto che la IV colonna contiene solo zeri, è ovvio che $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker$.

Inoltre $\lambda = 3$ ha molteplicità algebrica 1, quindi anche molteplicità geometrica 1.

Visto che il nucleo ha dimensione 1, una sua base è $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$Aut(A,1) = \ker(A - 1 \cdot I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Scambio III e IV riga

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-5\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Scambio III e IV riga

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & L \end{matrix} \end{array}$$

2 colonne libere $\Rightarrow$ dimensione $(\ker) = 2$

Troviamo una base di $Aut(A, 1)$ trovando le due soluzioni speciali.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \\ -6x_2 + 3 + 0 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\vec{S}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ -6x_2 + 0 + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\vec{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Aut(A, 1)$ ha come base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$Aut(A, 2) = \ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Scambio I e IV riga

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-5I} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & 29 & -15 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{IV+III} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & 29 & -15 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} p \;\; & p \;\; & p \;\; & L \end{matrix} \end{array}$$

Pongo la variabile libera $x_4 = 1$ nel sistema ridotto

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 29x_2 - 15x_3 - 5x_4 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$$

e trovo

$x_3 = 0$; $\quad 29x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{29}$

$x_1 - 6 \cdot \frac{5}{29} + 0 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 - \frac{30}{29} + 1 = 0 \Rightarrow$

$x_1 = \frac{1}{29}$

$\vec{S} = \begin{pmatrix} 1/29 \\ 5/29 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è l'unica soluzione speciale,

dunque $Aut(A, 2)$ ha come base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/29 \\ 5/29 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

3) Tutti gli autovalori sono reali, e le molteplicità algebriche e geometriche coincidono.

Quindi T è diagonalizzabile.

Una base di autovettori e'

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/29 \\ 5/29 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dunque, se considero la matrice cambio di base

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1/29 \\ 0 & 1/2 & 1/3 & 5/29 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ si ha che

$$S^{-1} A S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ diagonale.

(4) Un possibile modo per trovare un NON autovettore e' questo:
Sappiamo che $T(v_1) = 3 \cdot v_1$ e
$T(v_2) = v_2$ dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allora $T(v_1+v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 3v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

<u>NON</u> e' un multiplo di $v_1+v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e

quindi v_1+v_2 NON e' un autovettore.

Esercizio 4. [6pt.] Trovare un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che:

- $\mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.

Determinare poi esplicitamente (giustificando i passaggi) gli insiemi:

- $\mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Ker}(T)$;
- $\mathrm{Ker}(T^2)$.

$\mathrm{Im}(T) \cap \ker(T)$ e' un sottospazio (perche' intersezione di sottospazi) ed e' NON banale per l'ipotesi, dunque $\dim(\mathrm{Im}(T) \cap \ker(T)) \geq 1$.

Inoltre NON puo' essere $\dim(\mathrm{Im}(T) \cap \ker(T)) \geq 2$ altrimenti $\dim(\mathrm{Im}(T)) \geq 2$ e $\dim(\ker(T)) \geq 2$ mentre $\dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\ker(T)) = 2$.

L'unica possibilita' e' che

$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$ e $\dim(\ker(T)) = 1$

Ma allora deve essere $\mathrm{Im}(T) = \ker(T)$, da cui segue che T^2 e' l'applicazione nulla (se $x \in \mathbb{R}^2$, $T(x) \in \mathrm{Im}(T) = \ker(T) \Rightarrow T(T(x)) = 0$)

Quindi $\ker T^2 = \mathbb{R}^2$.

Per trovare un esempio di una applicazione lineare T con queste proprietà, basta definire

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad e \quad T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

In questo modo $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in \ker T$ e $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Im} T$

Si tratta dell'applicazione lineare

$T(x,y)=(y,0)$ la cui matrice associata (rispetto alla base canonica) e'

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$$