

Esercizio 2. [9 pt.] Sia $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$T(x, y) = (x, 2x - y, 3x + y)$$

1. Determinare la matrice A associata a T .
2. Verificare che T è iniettiva e determinare un'inversa sinistra di A .
3. La matrice A ammette inversa destra? (Giustificare la risposta).
4. Determinare l'insieme $X = T^{-1}(1, 0, 5) = \{(x, y) \mid T(x, y) = (1, 0, 5)\}$.

Esercizio 3. [12 pt.] Sia $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_3, 5x_1 + x_2 + 5x_3, x_3, x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 3x_4)$$

1. Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di T .
2. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.
3. Determinare se T è diagonalizzabile e, nel caso lo sia, determinare la sua forma diagonale.
4. Determinare un vettore di \mathbb{R}^4 che non sia un autovettore.

Esercizio 4. [6pt.] Trovare un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che:

- $\text{Im}(T) \cap \text{Ker}(T) \neq \{0\}$.

Determinare poi esplicitamente (giustificando i passaggi) gli insiemi:

- $\text{Im}(T) \cap \text{Ker}(T)$;
- $\text{Ker}(T^2)$.