fila A

Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria

27 Gennaio 2017

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

SOLUZIONI

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Se una matrice A ha due righe uguali allora non è invertibile.	☒	☐
2) Se $A^2 = 0$ è la matrice nulla allora $A = 0$ è la matrice nulla.	☐	☒
3) Se $a, b \in \mathbb{R}$, allora il numero complesso $z = e^{a+ib}$ ha parte immaginaria e^b.	☐	☒
4) Esistono due sottospazi $V, W \subseteq \mathbb{R}^5$ di dimensione 2 tali che $V \cap W = \{0\}$.	☒	☐
5) Ogni sistema lineare omogeneo con n equazioni in k variabili dove $k > n$ ha infinite soluzioni.	☒	☐
6) Siano v_1, v_2, v_3 tre vettori non nulli tali che $v_2 \perp v_1$ e $v_2 \perp v_3$. Allora v_1 e v_3 sono ortogonali.	☐	☒
7) Una matrice 2×2 non invertibile ha al più un autovalore $\lambda \neq 0$.	☒	☐
8) Se $X = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ e $Y = \{m^2 \mid -4 \leq m \leq 4\}$ allora $X \cap Y$ contiene due elementi.	☒	■

ATTENZIONE: La seconda parte del test è sul retro di questo foglio.

SECONDA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante o errata = 0;	risposta esatta = +2.5;

1) Trovare una base del seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 7y - 3z = 0\}.$$

RISPOSTA:

$\mathcal{B} = \left\{ \left(-\frac{7}{4}, 1, 0\right), \left(\frac{3}{4}, 0, 1\right) \right\}$

2) Applicando il metodo di Gauss-Jordan, trovare l'inversa A^{-1} della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Determinare per quali valori del parametro k i seguenti vettori sono linearmente dipendenti.

$$v_1 = (1, k, 0) \quad v_2 = (2, -k, 1) \quad v_3 = (2-k, 2-k, 0)$$

RISPOSTA:

$\begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 2 & -k & 1 \\ 2-k & 2-k & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & k \\ 2-k & 2-k \end{vmatrix} = -(2-k-2k+k^2) = -(k^2-3k+2)$ $k = \{1, 2\}$

4) Dati i numeri complessi $z = 2 - 2i$ e $w = \frac{3}{4}\pi i$, calcolare e scrivere forma cartesiana e forma polare del numero

$$\frac{|z|}{e^{\overline{w}}}$$

RISPOSTA:

polare $\;2\sqrt{2}\;\left(\frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{3}{4}\pi\right)$

cartesiana $\;2 + 2i$

fila B

Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria

27 Gennaio 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

SOLUZIONI

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Una matrice 2×2 non invertibile non ha autovalori $\lambda \neq 0$.	☐	☒
2) Esistono due sottospazi $V, W \subseteq \mathbb{R}^5$ di dimensione 3 tali che $V \cap W = \{0\}$.	☐	☒
3) Se una matrice B è invertibile allora ha due righe uguali.	☐	☒
4) Se $A = \{k^2 \mid -3 \leq k \leq 3\}$ e $B = \{4m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ allora $A \cap B$ contiene due elementi.	☒	■
5) Siano v_1, v_2, v_3 tre vettori non nulli tali che $v_1 \perp v_2$ e $v_2 \perp v_3$. Allora v_1 e v_3 sono ortogonali.	☐	☒
6) Ogni sistema lineare omogeneo con k equazioni in n variabili dove $k > n$ ha solo la soluzione nulla.	☐	☒
7) Se $A^2 = I$ è la matrice identità allora $A = I$ è la matrice identità.	☐	☒
8) Se $a, b \in \mathbb{R}$, allora il numero complesso $z = e^{a+ib}$ ha parte immaginaria b.	☐	☒

ATTENZIONE: La seconda parte del test è sul retro di questo foglio.

SECONDA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante o errata = 0;	risposta esatta = +2.5;

1) Determinare per quali valori del parametro k i seguenti vettori sono linearmente dipendenti.

$$v_1 = (k-2, 0, k) \quad v_2 = (1, -1, 2) \quad v_3 = (k-3, 0, 1)$$

RISPOSTA:

$$\begin{vmatrix} k-2 & 0 & k \\ 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} k-2 & k \\ k-3 & 1 \end{vmatrix} = k-2-k^2+3k = -(k^2-4k+2) \quad \boxed{k = 2 \pm \sqrt{2}}$$

2) Trovare una base del seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 4y + 7z = 0\}.$$

RISPOSTA:

$$B = \left\{ \left(\tfrac{4}{3}, 1, 0\right), \left(-\tfrac{7}{3}, 0, 1\right) \right\}$$

3) Dati i numeri complessi $z = 3 + 3i$ e $w = -\frac{\pi}{4}i$, calcolare e scrivere forma cartesiana e forma polare del numero

$$\frac{|z|}{e^{\overline{w}}}$$

RISPOSTA: polare $\left(\frac{6}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right)$

cartesiana $3 + 3i$

4) Applicando il metodo di Gauss-Jordan, trovare l'inversa A^{-1} della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

27 Gennaio 2017 – tempo a disposizione : 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. [6 pt.]
Trovare tutte le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$e^{5\bar{z}+2} - e^{z} = 0$$

$z = a + ib \Rightarrow 5\bar{z} = 5a - 5ib \Rightarrow$

$e^{5\bar{z}+2} = e^{5a+2-5ib} = e^{5a+2}(\cos 5b - i \sin 5b)$

e' il numero complesso con $\rho = e^{5a+2}$ e $\theta = -5b$

$e^{z} = e^{a+ib} = e^{a}(\cos b + i \sin b)$ e' il numero complesso con $\rho = e^{a}$ e $\theta = b$

Da $e^{5\bar{z}+2} = e^{z}$ segue che

$e^{5a+2} = e^{a} \Rightarrow 5a + 2 = a \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$-5b = b + 2k\pi \Rightarrow b = \frac{2k\pi}{-6} = -k\frac{\pi}{3}$

Dunque l'equazione ha infinite soluzioni, precisamente ha come insieme delle soluzioni:

$$S = \left\{ -\frac{1}{2} - k \cdot \frac{\pi}{3} i \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{h\pi}{3} i \,\middle|\, h \in \mathbb{Z} \right\}$$

Esercizio 2. [9 pt.] Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$T(x, y, z, w) = (x + z + w, w, 2x + y + 3z + w, -x + y - w)$$

1. Si determini la dimensione e una base di $\mathrm{Im}(T)$;
2. Si determini la dimensione e una base di $\ker(T)$;
3. Determinare tutte le soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x + z + w = 7 \\ w = 4 \\ 2x + y + 3z + w = 9 \\ -x + y - w = -8 \end{cases}$$

La matrice associata a T rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV}+\mathrm{I}]{\mathrm{III}-2\mathrm{I}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{scambio II e III riga}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{IV}-\mathrm{II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{IV}-\mathrm{III}} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x & y & z & w \\ P & P & L & P \end{matrix} \end{array}$$

1. $\dim(\mathrm{Im}\, T) = \#\text{colonne pivot} = 3$

Base $= \{$colonne pivot di $A\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

2. $\dim(\ker T) = \#\text{colonne libere} = 1$

Troviamo la soluzione speciale, ponendo la variabile libera $z = 1$ nel sistema ridotto $\begin{cases} x + z + w = 0 \\ y + z - w = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Longrightarrow$

$w=0, \quad y+1-0=0 \Rightarrow y=-1, \quad x+1+0=0 \Rightarrow x=-1$

$\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dunque $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ base di Ker T.

3. Viene richiesto di risolvere $A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix}$

Con le stesse riduzioni viste prima, si trova

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 9 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow[IV+I]{III-2I} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{scambio II e III riga}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{IV-II} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Il sistema si riduce a

$\begin{cases} x + z + w = 7 \\ y + z - w = -5 \\ w = 4 \end{cases}$.

Pongo la variabile libera $z=0$.

$w = 4 \Longrightarrow$

$y + 0 - 4 = -5 \Rightarrow y = -1$

$x + 0 + 4 = 7 \Rightarrow x = 3$

Una soluzione particolare è $s_p = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

L'insieme di TUTTE le soluzioni e' dato da

$$S = \left\{ s_p + v \;\middle|\; v \in \ker T \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3-\mu \\ -1-\mu \\ \mu \\ 4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu \in \mathbb{R} \right\} .$$

Esercizio 3. [11 pt.]
Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & k-3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2k \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica.
2. Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.
3. Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k non è invertibile.
4. Quando $k = 0$, trovare una matrice invertibile S tale che $S^{-1}A_kS$ è una matrice diagonale.

1e2 $\det(A_k - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & -2 & k-3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & -2k \\ 0 & 0 & 0 & k-1-\lambda \end{pmatrix} =$

(in una matrice triangolare superiore il determinante e' il prodotto degli elementi sulla diagonale) $= -\lambda(1-\lambda)(-2-\lambda)(k-1-\lambda) = 0 \Longrightarrow$

$\lambda = 0, \quad \lambda = 1, \quad \lambda = -2, \quad \lambda = k-1$ AUTOVALORI

Se $k-1 \neq 0, 1, -2$, cioe' se $k \neq 1, 2, -1$ allora si hanno 4 autovalori ognuno con molteplicita' algebrica 1.
In questo caso A_k e' diagonalizzabile.

$k=1$ $\lambda = 0$ m.a. 2, $\lambda = 1$ m.a. 1, $\lambda = -2$ m.a. 1

La molteplicita' geometrica di $\lambda = 0$ e' la dimensione dell' autospazio $Aut(A_1, 0) = \ker(A_1 - 0I) = \ker A_1 =$

$$= \ker \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Riduciamo $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{II riga} + \\ \frac{1}{2}\text{ I riga}}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\text{III} + 2\,\text{II} \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} L & P & P & L \end{array} \end{array}$$

2 colonne libere $\Rightarrow$ molteplicità geometrica di $\lambda = 0$ e' 2 = molt. alg.

Dunque A_1 e' DIAGONALIZZABILE.

$\boxed{k=2}$ $\lambda = 0$ m.a. 1, $\lambda = 1$ m.a. 2, $\lambda = -2$ m.a. 1

$$Aut(A_2, 1) = \ker \left(A_2 - 1 \cdot I \right) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Scambio II e III riga $\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & L & P & L \end{array} \end{array}$

2 colonne libere $\Rightarrow$ molt. geom. di $\lambda = 1$ e' 2 = molt. alg.

Dunque A_2 e' DIAGONALIZZABILE

$\boxed{k=-1}$ $\lambda = 0$ m.a. 1, $\lambda = 1$ m.a. 1, $\lambda = -2$ m.a. 2

$$\text{Aut}(A_{-1}, -2) = \ker(A_{-1}+2I) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} p & p & L & p \end{matrix}$$

1 colonna libera $\Rightarrow$ molt. geom.

di $\lambda = -2$ e' $1 < 2$ = molt. alg.

Dunque A_{-1} <u>NON</u> e' DIAGONALIZZABILE

Dunque: A_k e' diagonalizzabile per ogni $k \neq -1$

$\lfloor 3 \rfloor$ A_k <u>non</u> e' invertibile $\Leftrightarrow$ $\ker A_k \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ e' autovalore

Ma $\lambda = 0$ e' autovalore per ogni k, dunque A_k <u>NON</u> e' invertibile per ogni k.

$\lfloor 4 \rfloor$ Con $k=0$, $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Abbiamo già visto che A_0 e' DIAGONALIZZABILE, con autovalori $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = -2$, $\lambda = -1$

Troviamo una base di autovettori:

$\text{Aut}(A_0, 0) = \ker \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ha come base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$$\mathrm{Aut}(A_0, 1) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Scambio III e II riga, poi IV e III riga

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & L & P & P \end{array} \end{array}$$

x_2 e' variabile libera

Pongo $x_2 = 1$ nel sistema

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ -3x_3 = 0 \\ -2x_4 = 0 \end{cases}$$

Ricavo: $x_4 = 0$, $x_3 = 0$, $-x_1 - 2 - 0 - 0 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$

$\mathrm{Aut}(A_0, 1)$ ha come base $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\mathrm{Aut}(A_0, -2) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Scambio IV e III riga:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & L & P \end{array} \end{array}$$

x_3 e' variabile libera. Pongo $x_3 = 1$ nel sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Ricavo: $x_4 = 0$, $x_2 = 0$, $2x_1 - 0 - 2 - 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$.

$\mathrm{Aut}(A_0, -2)$ ha come base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\mathrm{Aut}(A_0,-1) = \ker \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \mathrm{P} & \mathrm{p} & \mathrm{p} & \mathrm{L} \end{matrix} \end{array}$$

x_4 variabile libera.
Pongo $x_4 = 1$ nel sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$$

e ricavo $x_2 = 0 / x_3 = 0 / x_1 = 3$

$\mathrm{Aut}(A_0,-1)$ ha come base $\left\{ \begin{pmatrix} +3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Abbiamo trovato:

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ autovettore di autovalore $\lambda = 0$

$V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ autovettore di autovalore $\lambda = 1$

$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ autovettore di autovalore $\lambda = -2$

$V_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ autovettore di autovalore $\lambda = -1$

$S = \left(V_1 \middle| V_2 \middle| V_3 \middle| V_4 \right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & +3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e' la matrice

"cambio di base" tale che

$$S^{-1} A_0 S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. [6pt.]
Trovare la matrice associata A rispetto alla base canonica di un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa le seguenti tre proprietà:

1. $(1,1,0)$ è autovettore di autovalore 1,
2. $(0,1,1)$ è autovettore di autovalore -1,
3. $(1,1,1) \in \ker(f)$.

Sappiamo che $f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$;

$f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\\-1\end{bmatrix}$; $f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Notiamo che i tre vettori $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$

formano una base. Infatti la matrice

$S = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ ha $\det S = 1$, come si può facilmente verificare.

Rispetto alla base $\mathcal{B}$, la matrice associata ad f è data da $B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Se A è la matrice associata ad f rispetto alla base canonica allora si ha $B = S^{-1} A S$ e

quindi $A = S B S^{-1}$

Calcoliamo l'inversa di S col metodo di Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II-I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III-II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I-III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Dunque $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = S B S^{-1} = \text{(omettiamo i calcoli)}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Metodo alternativo I</u>: $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$f(e_1) = f(b_3 - b_2) = f(b_3) - f(b_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = f(b_1 + b_2 - b_3) = f(b_1) + f(b_2) - f(b_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = f(b_3 - b_1) = f(b_3) - f(b_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $A = \left(f(e_1) \,|\, f(e_2) \,|\, f(e_3) \right)$ si ottiene mettendo in colonna le immagini dei vettori e_1, e_2, e_3

Metodo alternativo II

Direttamente con un po' di calcoli (che in questo caso particolare sono "ragionevoli")

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$ è la matrice che cerco

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ d+e=1 \\ g+h=0 \end{cases} \quad (1)$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ e+f=-1 \\ h+i=-1 \end{cases} \quad (2)$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ d+e+f=0 \\ g+h+i=0 \end{cases} \quad (3)$$

Metto insieme le condizioni (1), (2), (3) ed ottengo un sistema 9×9, risolvendo il quale si ottiene che $a=0$, $b=1$, $c=-1$, $d=1$, $e=0$, $f=-1$, $g=1$, $h=-1$, $i=0$, e quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$