Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria

8 Settembre 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
1) $A \cup B = A \cap B$ se e solo se $A = B$.	☒	☐
2) Se A è una matrice invertibile e $A^{-1}BA = I$ allora $B = I$.	☒	☐
3) Se $z + \bar{z} = 0$ allora $e^z \in \mathbb{R}$.	☐	☒
4) Ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ non biunivoca ha almeno un autovalore reale.	☒	☐
5) Se $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n^2 - 3 < 20\}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}\,\text{t.c.}\, 3m - 1 = n\}$ allora $A \cap B = \emptyset$.	☐	☒
6) Se $z = 3\log 2 - 100\pi i$ allora $e^z = 6$.	☐	☒
7) I vettori $(1, -3, 5)$ e $(7, 4, 1)$ formano un angolo ottuso.	☐	☒
8) Siano $v, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$. Se $v \perp (w_1 + w_2)$ allora $v \perp w_1$ e $v \perp w_2$.	☐	☒

ATTENZIONE: La seconda parte del test è sul retro di questo foglio.

SECONDA PARTE

PUNTEGGIO : **risposta mancante o errata = 0;**	**risposta esatta = +2.5;**

1) Determinare per quali valori di t i seguenti tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (t, 0, t);\ v_2 = (-t, 2, -1);\ v_3 = (0, 2, 0)$$

$t \neq 0, 1$

RISPOSTA: $\det \begin{pmatrix} t & -t & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ t & -1 & 0 \end{pmatrix} = -2(-t+t^2) \neq 0$

2) Applicando il metodo di Gauss-Jordan, trovare la matrice inversa A^{-1} della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -7/2 & -1 & 5/2 \end{pmatrix}$$

3) Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Trovare la sua inversa sinistra B che ha tutti zeri nella seconda colonna.

RISPOSTA:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

4) Dati i numeri complessi $z = \sqrt{3} + i$ e $w = 2 + 2\sqrt{3}i$, calcolare e scrivere sia in *forma cartesiana* che in *forma polare* il seguente numero:

$$\frac{z^{2000}}{w^{999}}.$$

RISPOSTA:

$z \to (2, \pi/6)$ $\qquad \dfrac{z^{2000}}{w^{999}} \to (4, \pi/3) = w$

$w \to (4, \pi/3)$

Esercizio 1

1. $z^4 = 4\bar{z}^{-2}$

In coordinate polari $z \to (\rho, \theta)$

$z^4 \to (\rho^4, 4\theta)$ e $4\bar{z}^{-2} \to (4\rho^2, -2\theta)$

Dunque $\rho^4 = 4\rho^2 \Rightarrow \rho = 0$ o $\rho = 2$

e $4\theta = -2\theta + 2k\pi \Rightarrow 6\theta = 2k\pi \Rightarrow$

$\theta = k\frac{\pi}{3} = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$

Si hanno, oltre a $\boxed{z_0 = 0}$, le seguenti 6 soluzioni scritte in coordinate Cartesiane:

$z_1 = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2$

$z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}\, i$

$z_3 = 2(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi) = -1 + \sqrt{3}\, i$

$z_4 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$

$z_5 = 2(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi) = -1 - \sqrt{3}\, i$

$z_6 = 2(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi) = 1 - \sqrt{3}\, i$

2. $e^{4zi} = -1$

$z = a + ib \Rightarrow 4zi = 4ai - 4b$

$e^{4zi} = e^{-4b+4ai} \xrightarrow[\text{in coordinate polari}]{} (e^{-4b}, 4a)$

$-1 \xrightarrow[\text{coordinate polari}]{} (1, \pi)$

Dunque $e^{-4b} = 1 \Rightarrow -4b = 0 \Rightarrow b = 0$

e $4a = \pi + 2k\pi \Rightarrow a = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

Ci sono infinite soluzioni, precisamente

$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Esercizio 2

1. La matrice associata a T e'

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

il cui determinante si puo' calcolare cosi':

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$2 \cdot 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \cdot 1$$
$$- \left[5 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot (-3) \right]$$
$$= -12 + 0 + 5 - 0 - 2 + 9 = 0$$

Dunque A non e' invertibile, e T non e' ne' iniettiva, ne' suriettiva.

2. La matrice cambio di base e'

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice cercata B si calcola cosi':

$$B = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 10 & -26 & 0 \\ 4 & -9 & -2 \\ 5 & -13 & 10 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

La matrice associata al sistema omogeneo è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Riduciamo, considerando anche la colonna dei termini noti (cosa che ci risulterà utile per rispondere alla domanda 3.)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 7 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III riga} - 2\cdot\text{I riga}]{\text{II riga} - \text{I riga}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III riga} + \text{II riga}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} \text{pivot} & \text{libera} & \text{pivot} & \text{libera} \end{array}$$

SISTEMA RIDOTTO

$$\begin{cases} 2x - y + 4z + t = -2 \\ 3z - 2t = 3 \end{cases}$$

1. Le colonne libere sono la II e la IV, dunque le variabili libere sono y e t

Ponendo $y=0$ e $t=1$ nel sistema ridotto omogeneo si trova

$$\begin{cases} 2x + 4z + 1 = 0 \\ 3z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} z = \frac{2}{3} \\ 2x = -\frac{8}{3} - 1 = -\frac{11}{3} \Rightarrow \\ x = -\frac{11}{6} \end{array}$$

Dunque si ha $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -11/6 \\ 0 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker A$

Ponendo $y=1$ e $t=0$ nel sistema ridotto omogeneo

si trova $\begin{cases} 2x - 1 + 4z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} z=0 \\ x = 1/2 \end{array}$

e si ha $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker A$.

Una base del nucleo di A è data da

$$\left\{ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -11/6 \\ 0 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Le colonne pivot sono la I e la III, dunque una base dello spazio delle colonne si ottiene prendendo la I e la III colonna della matrice iniziale A:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

3. Troviamo una soluzione particolare del sistema, considerando la sua forma ridotta

$$\begin{cases} 2x - y + 4z + t = -2 \\ 3z - 2t = 3 \end{cases}$$

e ponendo le variabili libere $y = t = 0$

si ottiene $\begin{cases} 2x + 4z = -2 \\ 3z = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} z = 1 \\ x = -3 \end{array}$

Quindi una soluzione particolare è:

$$\vec{s}_p = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'insieme di tutte le soluzioni è

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -11/6 \\ 0 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

cioè l'insieme dei vettori che si ottengono sommando una fissata soluzione particolare ad un qualunque vettore del nucleo.

Esercizio 4

1. $$A_k = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & k+1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è dato da

$$\det(A_k - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ -3 & -2-\lambda & k+1 \\ 6 & 4 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

che possiamo calcolare così:

$$\begin{array}{ccccc} 3-\lambda & 2 & 1 & 3-\lambda & 2 \\ -3 & -2-\lambda & k+1 & -3 & -2-\lambda \\ 6 & 4 & 2-\lambda & 6 & 4 \end{array}$$

$$(3-\lambda)(-2-\lambda)(2-\lambda) + 2(k+1)\cdot 6 + 1\cdot(-3)(4)$$

$$- \left[1\cdot(-2-\lambda)6 + (3-\lambda)(k+1)4 + 2\cdot(-3)(2-\lambda) \right] =$$

$$(\lambda^2-4)(3-\lambda) + 12(k+1) - 12 + 6(\lambda+2) +$$

$$+ (\lambda-3)(4k+4) + 6(2-\lambda) =$$

$$3\lambda^2 - \lambda^3 - \cancel{12} + 4\lambda + \cancel{12k} + \cancel{12} - \cancel{12} + \cancel{6\lambda} + \cancel{12}$$

$$+ 4k\lambda + 4\lambda - \cancel{12k} - \cancel{12} + \cancel{12} - \cancel{6\lambda} =$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + (4k+8)\lambda = 0$$

2. A_k ha $\lambda = 3$ come autovalore se e solo se 3 e' radice del polinomio caratteristico, cioe'

$$-(3)^3 + 3\cdot(3)^2 + (4k+8)\cdot 3 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{-27} + \cancel{27} + (4k+8)\cdot 3 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$4k+8 = 0 \iff k = -2$$

3. ~~Poiché A e' diagonalizzabile~~,

A avra' una base formata da autovettori

$\mathcal{B} = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ dove $Av_1 = -1\cdot v_1$, $Av_2 = 1 v_2$, $Av_3 = 0$

Poniamo $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e per semplicita'

poniamo ad esempio $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Notiamo che in questo modo $\mathcal{B}$ e' una base.

~~Ad esempio supponiamo che v_2 sia autovettore relativo all'autovalore 1 e v_3 sia autovettore relativo all'autovalore 0.~~

Dunque la matrice D rispetto alla base di autovettori B sarà

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D si ottiene da A mediante cambio di base, cioè $D = S^{-1} A S$ dove

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi la matrice cercata è $A = S D S^{-1}$.

Svolgendo i calcoli si trova che

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ e che

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$