Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria

6 Giugno 2016 - A

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Il vettore $(3,4)$ ha coordinate $(-2,1)$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(2,-3),(1,-2)\}$.	☐	☒
2) Se $A = \{a \mid \exists x \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a = 3x-1\}$ e $B = \{b \in \mathbb{N} \mid 1 \leq b \leq 6\}$ allora $A \cap B = \{2,5\}$.	☒	☐
3) Ci sono infiniti $z \in \mathbb{C}$ tali che $e^z = 1$.	☒	☐
4) La trasposta di un prodotto è il prodotto delle trasposte: $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$.	☐	☒
5) I vettori $(-2,1,-2)$ e $(3,-2,-1)$ formano un angolo ottuso.	☒	☐
6) Se $v_1 \perp w$ e $v_2 \perp w$ allora $(v_1+v_2) \perp w$.	☒	☐
7) Se $\det(AB) = 0$ allora $\det(A) = 0$ e $\det(B) = 0$.	☐	☒
8) Ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ha almeno un autovalore reale.	☐	☒

ATTENZIONE: La seconda parte del test è sul retro di questo foglio.

Esercizio 2. | PUNTEGGIO : **risposta mancante o errata = 0; risposta esatta = +2.5;** |

1) Dati i numeri complessi $z = 1 - 2\pi i$ e $w = 1 + i$, calcolare e scrivere sia in forma cartesiana che in forma polare il seguente numero:

$$\frac{e^{4\pi^2 + z^2}}{\overline{w}}$$

RISPOSTA: $e/2 + i\, e/2 \rightsquigarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e, \frac{\pi}{4}\right)$

2) Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Trovare la sua inversa sinistra B che ha tutti zero nella seconda colonna.

RISPOSTA: $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

3) Applicando il metodo di Gauss-Jordan, trovare la matrice inversa A^{-1} della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA: $\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4) Calcolare il prodotto $A^T \cdot A$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA: $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria

6 Giugno 2016 - B

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Il vettore $(-1,6)$ ha coordinate $(1,-3)$ rispetto alla base $\mathcal{B}=\{(2,-1),(-1,2)\}$.	☐	☒
2) Se $A=\{a \mid \exists x\in\mathbb{N}$ t.c. $a=2x+1\}$ e $B=\{b\in\mathbb{N}\mid 1\leq b\leq 6\}$ allora $A\cap B=\{2,5\}$.	☐	☒
3) C'è un unico $z\in\mathbb{C}$ tale che $e^z=1$.	☐	☒
4) La trasposta di una somma è la somma delle trasposte: $(A+B)^T=A^T+B^T$.	☒	☐
5) I vettori $(2,1,-2)$ e $(3,-1,1)$ formano un angolo ottuso.	☐	☒
6) Se $v\perp w_1$ e $v\perp w_2$ allora $v\perp(w_1+w_2)$.	☒	☐
7) Ogni applicazione lineare $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ biunivoca ha almeno un autovalore reale.	☐	☒
8) Se $\det(AB)=0$ allora $\det(A)=0$ o $\det(B)=0$.	☒	☐

ATTENZIONE: La seconda parte del test è sul retro di questo foglio.

Esercizio 2. | PUNTEGGIO : **risposta mancante o errata = 0; risposta esatta = +2.5;** |

1) Dati i numeri complessi $z = 2 + \pi i$ e $w = 1 - i$, calcolare e scrivere sia in forma cartesiana che in forma polare il seguente numero:

$$\frac{e^{\pi^2+z^2}}{\overline{w}}$$

RISPOSTA: $\frac{e^4}{2} - \frac{e^4}{2} i \to \left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^4, -\frac{\pi}{4}\right)$

2) Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Trovare la sua inversa destra B che ha tutti zero nella seconda riga.

RISPOSTA: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

3) Applicando il metodo di Gauss-Jordan, trovare la matrice inversa A^{-1} della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4) Calcolare il prodotto $B \cdot B^T$ dove

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

Esercizio 1 (8 punti)

(a) $z^3 + 2\bar{z} = 0 \iff z^3 = -2\bar{z}$

$\boxed{z = 0}$ è soluzione.

Quando $z \neq 0$, $z^3 = -2\bar{z} \iff$

$z^4 = -2 \cdot \bar{z} \cdot z = -2|z|^2$

In coordinate polari, $z = (\rho, \theta)$

$z^4 = (\rho^4, 4\theta)$

$-2|z|^2 = (2\rho^2, \pi)$ (è un numero reale negativo)

$$z^4 = -2|z|^2 \Rightarrow \begin{cases} \rho^4 = 2\rho^2 \\ 4\theta = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

Dunque $\rho^2 = 2 \Rightarrow \rho = \sqrt{2}$ e

$4\theta = \pi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

$$S_1 = \left\{ \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right); \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right); \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right); \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) \right\}$$

$\iff \quad S_1 = \{0, 1+i, -1+i, -1-i, 1, -i\}$

(b) $\quad e^{2z} \quad e^{\bar{z}+3} \iff e^{2z} = e^{\bar{z}+3}$

Se $z = a + ib$

$$e^{2a+2ib} = e^{a+3-ib} \iff$$

$$\begin{cases} 2a = a + 3 \\ 2b = -b + 2k\pi \end{cases}$$

Quindi $a = 3$ e $3b = 2k\pi \iff b = \frac{2\pi}{3}k$

Le soluzioni sono infinite:

$$S_2 = \left\{ 3 + \frac{2\pi}{3}k \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Esercizio 2 (9 punti)

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -4 & -1 \\ 6 & -1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

(b) & (c) Riduzioni di Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & -1 & 9 \\ 6 & -1 & -5 & -4 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II e I}]{\text{scambio}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -4 & -1 & 9 \\ 4 & 0 & -1 & -3 & 3 \\ 6 & -1 & -5 & -4 & 12 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -4 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 7 & -1 & -15 \\ 0 & 2 & 7 & -1 & -15 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -4 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 7 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} P & P & L & L \end{array} \end{array}$$

Una base per lo spazio delle colonne $Col(A)$ si ottiene considerando le prime due colonne di A, cioè $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Per trovare una base dello spazio nullo di A dobbiamo trovare le soluzioni speciali.

Visto che le variabili libere sono x_3 e x_4,
si prende il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + 7x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

e si pone

1) $\begin{matrix} x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4 = 0 \\ 2x_2 + 7 = 0 \end{cases}$

da cui $x_2 = -7/2$ e

$2x_1 + 7/2 - 4 = 0 \Rightarrow 2x_1 = 1/2 \Rightarrow x_1 = 1/4$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -7/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) $\begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 1 = 0 \\ 2x_2 - 1 = 0 \end{cases}$

da cui $x_2 = 1/2$ e $2x_1 - 1/2 - 1 = 0 \Rightarrow$

$2x_1 = 3/2 \Rightarrow x_1 = 3/4$. $\quad S_2 = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dunque una base dello spazio nullo di A e'

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1/4 \\ -7/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(d) Una soluzione particolare si trova risolvendo:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = 9 \\ 2x_2 + 7x_3 - x_4 = -15 \end{cases}$$

Ponendo le variabili libere $x_3 = x_4 = 0$,

si ottiene $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 9 \\ 2x_2 = -15 \end{cases}$

da cui $x_2 = -15/2$ e $2x_1 + 15/2 = 9 \Rightarrow$

$2x_1 = 3/2 \Rightarrow x_1 = 3/4$. $x_p = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -15/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Quindi l'insieme delle soluzioni e'

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 3/4 \\ -15/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1/4 \\ -7/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Esercizio 3 (10 punti) La matrice associata a T e'

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -4-\lambda & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 5-\lambda & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 2-\lambda & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Per calcolare il determinante, ad esempio sviluppo lungo l'ultima colonna ed ottengo

$$(-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 3 & 0 \\ -6 & 5-\lambda & 0 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$(2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 3 & 0 \\ -6 & 5-\lambda & 0 \\ 8 & -4 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$0 + (2-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 3 \\ -6 & 5-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(2-\lambda)^2 \left[(-4-\lambda)(5-\lambda) + 18 \right] =$$

$$= (2-\lambda)^2 \left(-20 + 4\lambda - 5\lambda + \lambda^2 + 18 \right) =$$

$$= (\lambda-2)^2 \left(\lambda^2 - \lambda - 2 \right) =$$

$$(\lambda-2)^2 (\lambda-2)(\lambda+1) = (\lambda-2)^3(\lambda+1)$$

1. Gli autovalori sono $\lambda = 2$ con moltepl. algebrico 3, e $\lambda = -1$ con molteplicità algebrico 1.

2. $\mathrm{Aut}(A, -1) = \ker(A + I) =$

$$\ker \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Riduco (prima divido la prima riga per -3)

$$\begin{pmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to$$

scambio II e IV riga che divido per 3

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} p & p & p & L \end{matrix}$$

C'è una variabile libera, dunque quel ker ha dimensione 1 $\Rightarrow$ Aut$(A, -1)$ ha dimensione 1.

Troviamo la soluzione speciale ponendo $x_4 = 1$.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 + 1 = 0 \\ 3x_3 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 = -1 \qquad x_3 = 1$$

La soluzione speciale è $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dunque una base di Aut$(A, -1)$ è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

—

$$\text{Aut}(A, 2) = \ker(A - 2I) =$$

$$\ker \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Riduco, ma prima per comodità divido la I e II riga per -6.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

scambio II e IV righe

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} p & p & L & p \end{matrix} \end{array}$$

C'è una sola variabile libera, dunque

$\dim \mathrm{Aut}(A,2) = \dim(\ker(A-2I)) = 1$

Per trovare una base prendo il sistema ridotto e pongo la variabile libera $x_3 = 1$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \quad e \quad x_3 = 1$$

Base di $\mathrm{Aut}(A,2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

3. T <u>NON</u> è diagonalizzabile perché

$\dim(\mathrm{Aut}(A,2)) < 3 =$ molteplicità algebrica.

Esercizio 4 (6 punti)

(a) Si tratta di verificare se la matrice ottenuta mettendo i vettori v_1, v_2, v_3 come colonne e' invertibile o no.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\det B = -3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = -3 \cdot (-4+5) \neq 0$$

quindi B e' invertibile e $\mathcal{B}$ e' una base.

(b) $\ker(g) = \text{Span}\{v_1, v_2\}$ ha dimensione 2.

Poiche' $\dim(\ker(g)) + \dim(\text{Im}(g)) = 3$ allora $\dim(\text{Im}(g)) = 1$ e l'unico modo per avere g suriettiva e' che

$$\text{Im}(g) = \mathbb{R}^1$$

Definisco $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lineare

suriettiva ad esempio in questo modo:

$$g(v_1) = 0$$
$$g(v_2) = 0$$
$$g(v_3) = 1$$