Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria

16 Febbraio - A

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1. PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.	☒	☐
2) Se A è una matrice antisimmetrica allora $\det(A) = 0$.	☐	☒
3) Se $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $n = k^2 + 1\}$ e $B = \{6, 8, 10\}$ allora $A \cap B \neq \emptyset$.	☒	☐
4) Se A è una matrice quadrata e $B = A^T + A$ allora B è simmetrica.	☒	☐
5) I vettori $(-1, -1, 4)$ e $(2, 1, -2)$ formano un angolo acuto.	☐	☒
6) Se esistono tre vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$ a due a due perpendicolari, allora $n \geq 3$.	☒	☐
7) Non esistono $z \in \mathbb{C}$ tali che $e^z = 0$.	☒	☐
8) Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione lineare biunivoca allora $m = n$.	☒	☐

ATTENZIONE: La seconda parte del test è sul retro di questo foglio.

Esercizio 2. PUNTEGGIO : **risposta mancante o errata = 0; risposta esatta = +2.5;**

1) Dati i numeri complessi $z = -\frac{3\pi}{2}i$ e $w = i - 1$, calcolare e scrivere sia in *forma cartesiana* che in *forma polare* il seguente numero:

$$\frac{e^z}{\overline{w}}$$

RISPOSTA: $-\frac{1}{2} - \frac{i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{5\pi}{4}i}$ $\begin{cases} \rho = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \theta = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$

2) Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Trovare la sua inversa sinistra B che ha tutti zero nella prima colonna.

RISPOSTA: $\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

3) Applicando il metodo di Gauss-Jordan, trovare la matrice inversa A^{-1} della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA: $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4) Calcolare il prodotto $B \cdot B^T$ dove

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

RISPOSTA:

Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria

16 Febbraio - B

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Ci sono infiniti $z \in \mathbb{C}$ tali che $e^z = 0$.	☐	☒
2) I vettori $(1, -2, -3)$ e $(2, 1, -2)$ formano un angolo acuto.	☒	☐
3) Se A è una matrice simmetrica allora $\det(A) \neq 0$.	☐	☒
4) Se A è una matrice quadrata e $B = A^T \cdot A$ allora B è simmetrica.	☒	☐
5) Autovettori relativi ad autovalori distinti sono perpendicolari.	☐	☒
6) Se due vettori non nulli di $\mathbb{R}^2$ sono perpendicolari allora formano una base.	☒	☐
7) Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione lineare iniettiva ma non suriettiva allora $m < n$.	☒	☐
8) Se $A = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } k = n^2 - 1\}$ e $B = \{6, 8, 10\}$ allora $A \cap B = \emptyset$.	☐	☒

ATTENZIONE: La seconda parte del test è sul retro di questo foglio.

Esercizio 2. PUNTEGGIO : **risposta mancante o errata = 0; risposta esatta = +2.5;**

1) Calcolare il prodotto $B \cdot B^T$ dove

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA:

2) Applicando il metodo di Gauss-Jordan, trovare la matrice inversa A^{-1} della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA:

3) Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Trovare la sua inversa destra B che ha tutti zero nell'ultima riga.

RISPOSTA:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Dati i numeri complessi $z = 1 + i$ e $w = \frac{3\pi}{2} i$, calcolare e scrivere sia in *forma cartesiana* che in *forma polare* il seguente numero:

$$\frac{e^{-w}}{\overline{z}}$$

RISPOSTA:

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \qquad \rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(-1 + i) \qquad \theta = \frac{3}{4}\pi$$

Esercizio 1

COMPITO SCRITTO 16/2/2016

In coordinate polari:

(a) $z = (\rho, \theta) \Longrightarrow$

$z^2 = (\rho^2, 2\theta)$

$\bar{z} = (\rho, -\theta)$ e $-\bar{z} = (2\rho, -\theta + \pi)$

Dunque $z^2 = -2\bar{z} \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \rho^2 = 2\rho & \Longrightarrow \rho = 0,\ \rho = 2 \\ 2\theta = -\theta + \pi + 2k\pi & \Longrightarrow 3\theta = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$\theta = \pi/3 + 2k\,\pi/3$$

$\rho = 0$ corrisponde a $z_0 = 0$

$\theta_1 = \pi/3$, $\theta_2 = \pi/3 + 2\pi/3 = \pi$, $\theta_3 = \pi/3 + 4\pi/3 = 5\pi/3 \approx -\pi/3$

Dunque con $\rho = 2$ otteniamo

$z_1 = 2\left(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

$z_2 = 2\left(\cos \pi + i \sin \pi\right) = 2\cdot(-1) = -2$

$z_3 = 2\left(\cos(-\pi/3) + i \sin(-\pi/3)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$

(b) $e^{z-1} = e^{2\bar{z}}$

$z = a + ib$

$z - 1 = (a-1) + ib$

$2\bar{z} = 2a - 2ib$

In coordinate polari:

$e^{z-1} \rightsquigarrow (e^{a-1}, b)$

$e^{2\bar{z}} \rightsquigarrow (e^{2a}, -2b)$

Dunque $e^{z-1} = e^{2\bar{z}} \iff \begin{cases} e^{a-1} = e^{2a} \\ b = -2b + 2k\pi \end{cases}$

e quindi $a - 1 = 2a \iff a = -1$

$3b = 2k\pi \Rightarrow b = 2k\pi/3 = 0, 2\pi/3, 4\pi/3, 6\pi/3$, ecc...

Le soluzioni sono infinite, e precisamente

$S = \{ -1 + 2k\pi/3 \mid k \in \mathbb{Z} \}$

Esercizio 2

(a)

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & -4 & 9 \\ 8 & -5 & -2 & -9 & 18 \\ 4 & -3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

(b) & (c)

Riduzioni di Gauss

$$A \xrightarrow[\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}-4\cdot\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & -4 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 7 & -18 \\ 0 & -1 & 2 & 7 & -18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & -4 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 7 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} p & p & l & l \end{array}$$

Una base dello spazio delle colonne $Col(A)$ si ottiene considerando le colonne pivot nella matrice iniziale A, dunque $Col(A)$ ha come base $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ e quindi ha dimensione 2

Per trovare una base del nucleo di A, si trovano le soluzioni speciali.

Le variabili libere sono x_3 e x_4.

Il sistema ridotto e'

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = 1$, $x_4 = 0$ $\Rightarrow$ $-x_2 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 0 = 0$
e quindi $x_2 = 2$

$2x_1 - 2 - 1 - 4 \cdot 0 = 0$ e

quindi $x_1 = 3/2$

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 0$, $x_4 = 1$ $\Rightarrow$ $-x_2 + 2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 = 0$ e
quindi $x_2 = 7$

$2x_1 - 7 - 0 - 4 \cdot 1 = 0$ e

quindi $x_1 = 11/2$

$$\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 11/2 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base del nucleo di A è $\left\{ \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11/2 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(d) Una soluzione particolare si ottiene dal sistema ridotto

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 9 \\ \quad\; -x_2 + 2x_3 + 7x_4 = -18 \end{cases}$$

ponendo le variabili libere $x_3 = x_4 = 0$.

Dunque si ottiene $x_2 = 18$ e

$$2x_1 - 18 - 0 - 0 = 9 \Rightarrow x_1 = 27/2$$

$$x_p = \begin{pmatrix} 27/2 \\ 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'insieme delle soluzioni è:

$$S = \left\{ \underbrace{\lambda_1 \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 11/2 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{generico vettore del nucleo.}} + x_p \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Esercizio 3

(a) $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1-k & k & -1 \\ k-1 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$

(b) $\det(A_k - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1-k & k-\lambda & -1 \\ k-1 & 0 & k+1-\lambda \end{pmatrix}$

$= (2-\lambda)(k-\lambda)(k+1-\lambda) = 0 \Rightarrow$

$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = k, \quad \lambda_3 = k+1$

(c) Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono 3 numeri distinti, allora certamente A_k e' diagonalizzabile. Infatti banalmente $k \neq k+1$ per ogni k. Se $k \neq 2$ e $k+1 \neq 2$, cioe' se $k \neq 2, 1$ allora A_k e' diagonalizzabile.

Se $k = 1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il suo polinomio caratteristico ha come radici $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

Quindi $\lambda = 2$ ha MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA 2.

Il corrispondente autospazio:

$$\mathrm{Aut}(A_1, 2) = \ker(A_1 - 2 \cdot I) =$$

$$\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ha dimensione 2,

come si può facilmente verificare.

Dunque MOLTEPLICITÀ ALG. = MOLTEPL. GEOM.

e A_1 è diagonalizzabile.

Se $k=2$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Il suo polinomio caratteristico ha come radici $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$

Quindi $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica 2.

Il suo autospazio

$$Aut(A_2, 2) = ker(A_2 - 2 \cdot I) =$$

$$ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Adesso $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{riga}]{\text{scambio I e III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II riga} + \text{I}}$

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ p \quad\; l \quad\; l \end{array}$$

Dunque $Aut(A_2, 2)$ ha dimensione 2 e la matrice A_2 e' diagonalizz.

(d) Abbiamo visto che per $k=2$ la matrice A_2 è in effetti diagonalizzabile.

Troviamo una base di autovettori.

$\underline{\lambda=2}$

$$\mathrm{Aut}(A_2, 2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo già visto che riducendo con le mosse di Gauss troviamo

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} p & \ell & \ell \end{matrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

dunque x_2 e x_3 sono variabili libere.

$\begin{matrix} x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_1 = 0 \qquad \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sol. speciale

$\begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{matrix} \Rightarrow x_1 = -1 \qquad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sol. speciale.

Dunque $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base dell'autospazio $\mathrm{Aut}(A_2, 2)$

$\lambda = 3$

$Aut(A_2, 3) = \ker(A_2 - 3I) =$

$$\ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III riga} + \text{I riga}]{\text{II riga} - \text{I riga}} \begin{array}{ccc} & & \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} p & p & l \end{matrix} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -x_1 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Variabile libera x_3

$x_3 = 1$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0 / \; x_2 = -1$

$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soluzione speciale.

Dunque $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $Aut(A_2, 3)$

Una base di autovettori è quindi

$$\mathcal{B} = \left\{ \underset{\substack{\downarrow \\ \lambda=2}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\substack{\downarrow \\ \lambda=2}}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\lambda=3}{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

Quindi la matrice cambio di base

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ è t.c.}$$

$$S^{-1} A_2 S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ diagonale}$$

Esercizio 4

(a) Basta verificare che la seguente matrice e' invertibile:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Le colonne di B sono i vettori di $\mathcal{B}$.

Sviluppando ~~...~~ lungo la seconda riga, si ottiene che

$$\det(B) = (-1)^{2+1} \cdot (-5) \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

Sviluppando ~~...~~ lungo la II colonna

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot (-4) \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)(-4) \cdot (-4) = -16$$

Dunque $\det B \neq 0$, quindi B e' invertibile e $\mathcal{B}$ e' una base.

(b) I vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti, dunque per definire un'applicazione lineare $g: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ basta assegnarne i valori sui vettori di $\mathcal{B}$.

Intanto deve essere $g(v_1) = g(v_2) = 0$ in modo che $\mathrm{Span}\{v_1, v_2\} \subseteq \ker g$.

Affinché sia suriettiva, dovrà essere

$$\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Span}\{g(v_1), g(v_2), g(v_3), g(v_4)\} =$$
$$= \mathrm{Span}\{g(v_3), g(v_4)\} = \mathbb{R}^n.$$

Quindi deve essere $n = 2$ e una g che soddisfa le proprietà richieste è, ad esempio, definita ponendo

$$g(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad g(v_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$