Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria

8 Gennaio 2016 - A

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Se λ è un autovalore di A, allora 2λ è un autovalore di $A+A$.	☒	☐
2) Se $V, W \subseteq \mathbb{R}^7$ sono due sottospazi di dimensione 5, allora $\dim(V \cap W)$ è almeno di 3.	☒	☐
3) $(-i)^{2016}$ è uguale a 1.	☒	☐
4) Lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche 5x5 ha dimensione 10.	☒	☐
5) Se $A = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ t.c. } m = 4k+1\}$ e $B = \{6, 7, 8, 10\}$ allora $A \cap B = \emptyset$.	☒	☐
6) Se A è una matrice ortogonale 2x2 allora $\det(A) = 1$.	☐	☒
7) $\det(A+A) = 2 \cdot \det(A)$.	☐	☒
8) Se tutti gli autovalori di A sono reali, allora A è diagonalizzabile.	☐	☒

A1)

$z = 3 + \pi i \qquad w = 1 + i$

$$\pi^2 + z^2 = \cancel{\pi^2} + 9 - \cancel{\pi^2} + 6\pi i = 9 + 6\pi i$$

$$e^{\pi^2 + z^2} = e^{9+6\pi i} = e^9\left(\cos(6\pi) + i\sin(6\pi)\right) = e^9$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\pi^2+z^2}}{\overline{w}} = \frac{e^9}{1-i} = \frac{e^9(1+i)}{2} = \frac{e^9}{2} + \frac{e^9}{2} i$$

In forma polare: $\rho = e^9 \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = \pi/4$

A2)

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ -a - 2b = 0 \\ 3c = 0 \\ -c - 2d = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow a = 1/3, \ b = -1/6 \\ \\ \Rightarrow c = 0, \ d = -1/2 \end{matrix}$$

Inversa sinistra cercata: $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

A3)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I e III riga}]{\text{scambio}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{3·II riga}]{\text{I riga} -} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 14 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II riga} - 4\cdot\text{III riga}]{\text{I riga} + 14\cdot\text{III riga}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 14 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{alla I e III riga}]{\text{cambio segno}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -14 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

L'inversa è $A^{-1} = \begin{pmatrix} -14 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A4) $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -4 \\ -1 & 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$. Sviluppando lungo la prima riga:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\lambda \left[(1-\lambda)(2-\lambda) + 12 \right] - 1 \cdot (1-\lambda) =$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 14) - 1 + \lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 13\lambda - 1$$

Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria

8 Gennaio 2016 - B

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
1) $(-i)^{4014}$ è uguale a 1	☐	☒
2) Se $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ t.c. } n = 3k-1\}$ e $B = \{3,5,6,7\}$ allora $A \cap B = \emptyset$	☐	☒
3) Lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche 5x5 ha dimensione 12.	☐	☒
4) Se A è una matrice ortogonale allora $\det(A) = 1$ o $\det(A) = -1$.	☒	☐
5) Se A è una matrice 2x2 allora $\det(A+A) = 4 \cdot \det(A)$.	☒	☐
6) Se λ è un autovalore di A, allora λ^2 è un autovalore di A^2.	☒	☐
7) Se $V, W \subseteq \mathbb{R}^7$ sono due sottospazi di dimensione 5, allora $\dim(V \cap W)$ è minore di 3.	☐	☒
8) Se A è diagonalizzabile allora tutti i suoi autovalori sono reali.	☐	☒

B1) $z = 2+2\pi i \qquad w = 1-i$

$$4\pi^2 + z^2 = \cancel{4\pi^2} + 4 \cancel{-4\pi^2} + 8\pi i = 4+8\pi i$$

$$e^{4\pi^2+z^2} = e^{4+8\pi i} = e^4\left(\cos(+8\pi) + i\sin(+8\pi)\right) = e^4$$

$$\Rightarrow \frac{e^{4\pi^2+z^2}}{\overline{w}} = \frac{e^4}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{e^4}{2}(1-i) = \frac{e^4}{2} - \frac{e^4}{2}i$$

In forma polare: $\rho = e^4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = -\frac{\pi}{4}$

B2)

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} a+3b = 1 \\ a-b = 0 \\ c+3d = 0 \\ c-d = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\Rightarrow a = b = 1/4 \\ \\ &\Rightarrow c = 3/4,\ d = -1/4 \end{aligned}$$

Inverse sinistra cercata $\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ 3/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$

COMPITO

1a) $2z^4 = \bar{z}^{-2}$. In coordinate polari:

$z = (\rho, \theta)$ $\qquad 2z^4 = (2\rho^4, 4\theta)$

$\qquad\qquad\qquad \bar{z}^{-2} = (\rho^2, -2\theta)$

Dunque $2\rho^4 = \rho^2 \Rightarrow \rho = 0$ o $\rho = \sqrt{2}/2$

e $4\theta = -2\theta + 2k\pi \Rightarrow 6\theta = 2k\pi \Rightarrow$

$\theta = k \cdot \pi/3$, cioè $\theta = 0, \pi/3, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$.

Si hanno quindi 7 soluzioni.

$z_0 = 0$

$z_1 = \sqrt{2}/2 \, (\cos 0 + i \sin 0) = \sqrt{2}/2$

$z_2 = \sqrt{2}/2 \, (\cos \pi/3 + i \sin \pi/3) = \sqrt{2}/4 \, (1 + i\sqrt{3})$

$z_3 = \sqrt{2}/2 \, (\cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3) = \sqrt{2}/4 \, (-1 + i\sqrt{3})$

$z_4 = \sqrt{2}/2 \, (\cos \pi + i \sin \pi) = -\sqrt{2}/2$

$z_5 = \sqrt{2}/2 \, (\cos 4\pi/3 + i \sin 4\pi/3) = \sqrt{2}/4 \, (-1 - i\sqrt{3})$

$z_6 = \sqrt{2}/2 \, (\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin 5\pi/3) = \sqrt{2}/4 \, (1 - i\sqrt{3})$

1b)

$$e^{\bar{z}} + i = 0 \iff e^{\bar{z}} = -i$$

Se $z = a + ib$, allora in coordinate polari

$$e^{\bar{z}} = e^{a-ib} = (e^a, -b)$$

$$-i = (1, -\pi/2).$$

Dunque $e^a = 1 \Rightarrow a = 0$

e $-b = -\pi/2 + 2k\pi$, cioè $b = \pi/2 + 2h\pi$.

Le soluzioni:

$$S = \{ i(\pi/2 + 2h\pi) : h \in \mathbb{Z} \}$$

2) Con le riduzioni di Gauss:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{III-I \\ IV+I}]{II-2\cdot I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{scambiole righe } II, III, IV}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III+II} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} p & p & l & p & \end{array} \end{array}$$

(a) $\dim(\mathrm{Im}\, T) = \dim(\mathcal{C}ol(A)) = 3$

$$\text{Base} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$ cioè le colonne pivot nella matrice iniziale A

(b) $\dim(\ker T) = \dim(\mathcal{N}(A)) = 1$

Solutione speciale. Si pone $x_3 = 1$ nel sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Si ricava: $x_4 = 0$, $x_2 + 2 = 0 \iff x_2 = -2$,

$x_1 - 2 + 2 + 0 = 0 \iff x_1 = 0$. Dunque

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \text{Base} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) Troviamo una soluzione particolare.

Con la riduzione, il nostro sistema equivale a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 1 \\ \qquad\qquad 3x_4 = 3 \\ \qquad\qquad x_4 = 1 \end{cases}$$

Ha soluzione. Poniamo la variabile libera $x_3 = 0$

ed otteniamo $x_4 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 + 1 + 0 + 1 = 2$

$\Updownarrow$

$x_1 = 0$

Dunque una soluz. particolare e':

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'insieme di tutte le soluzioni:

$$S = \{ \vec{x}_p + \vec{x} \mid \vec{x} \in \ker(T) \} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1-2\lambda \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

3)

(a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 3-\lambda & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$. Sviluppando lungo la III colonna:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (3-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 3 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

(sviluppando lungo la II colonna) $= (3-\lambda) \cdot (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 6 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$

$$(3-\lambda)^2 \left[(-2-\lambda)(1-\lambda) - 18 \right] = (3-\lambda)^2 \cdot (\lambda^2 + \lambda - 20) = 0 \iff$$

$\lambda = 3$ (molteplicità algebrica 2)

$\lambda^2 + \lambda - 20 = 0 \iff$ $\lambda = 4$ molt. alg. 1
$\lambda = 5$ molt. alg. 1

(c) $\mathrm{Aut}(A, 3) = \ker(A - 3I) = \ker \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Applichiamo la riduzione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{e III riga}]{\text{per comodità scambio I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ +4 & 0 & 0 & -5 \\ -5 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} p & \ell & \ell & p \end{matrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ -5x_4 = 0 \\ 3x_4 = 0 \\ -2x_4 = 0 \end{cases}$$

Per trovare una base del nucleo, cerchiamo le soluzioni particolari. Le variabili libere sono x_2, x_3.

$x_2 = 1$, $x_3 = 0$ e dunque $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_2 = 0$, $x_3 = 1$ e dunque $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Base per l'autospazio $Aut(A, 3)$: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Molteplicità geometrica $= 2$.

$$\mathrm{Aut}(A,4) = \ker(A-4I) = \ker\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I e III}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & -5 \\ -6 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-6\cdot\text{I}]{\text{II}-4\cdot\text{I},\ \text{III}+6\cdot\text{I}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}+\text{III}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} p & p & p & l \end{array} \end{array}$$

$\dim(\mathrm{Aut}(A,4)) = 1.$

Soluzione speciale con $x_4 = 1$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ -6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_3 = \tfrac{1}{2},\ x_2 = -3,\ x_1 = \tfrac{1}{2} \qquad \vec{s} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base: $\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$\text{Aut}(A,-5) = \ker(A+5\cdot I) = \ker\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & +8 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 8 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I e III}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{IV}-6\cdot\text{I}]{\substack{\text{II}-4\cdot\text{I} \\ \text{III}-3\cdot\text{I}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & -32 & -5 \\ 0 & 0 & -24 & 3 \\ 0 & 0 & -48 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}-2\cdot\text{III}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & -32 & -5 \\ 0 & 0 & -24 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} p & p & p & l \end{matrix} \end{array}$$

$$\dim(\text{Aut}(A,-5)) = 1$$

Soluzione speciale con $x_4 = 1$

$$\begin{cases} x_1 + 8x_3 = 0 \\ 8x_2 - 32x_3 - 5x_4 = 0 \\ -24x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x_3 = 1/8, \quad x_2 = +9/8, \quad x_1 = -1 \qquad \vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9/8 \\ 1/8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 9/8 \\ 1/8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(d)

A è diagonalizzabile perché ha tutti autovalori reali con molteplicità algebrica = molteplicità geometrica.

Una base di autovettori è

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 9/8 \\ 1/8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dunque, se S è la matrice cambio di base

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 9/8 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ allora}$$

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ diagonale.}$$

4) E e' il nucleo dell'applicazione lineare

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dove $f(x,y,z) = x-2y+z$.

La matrice associata e' $\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1, & -2, & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & L & L \end{matrix} \end{array}$

Ha due variabili libere, y e z.

Troviamo le soluzioni speciali:

$$\begin{matrix} y=1 \\ z=0 \end{matrix} \qquad x-2y+z=0 \implies x=2 \qquad \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} y=0 \\ z=1 \end{matrix} \qquad x-2y+z=0 \implies x=-1 \qquad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e' una base di E.

Considero ~~una~~ la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e

Sia $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e l'applicazione lineare associata,

cioe' $T(x,y,z) = (2x-y, x, y)$

Allora $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Col}(T) = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= E$ come voluto.

$$T^{-1}(0,1,2) = \{(x,y,z) \mid T(x,y,z) = (0,1,2)\}$$

è l'insieme di soluzioni del sistema associato alla matrice A, con termini noti $(0,1,2)$, cioè:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Una soluzione particolare è $\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\ker \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha come base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

e quindi l'insieme cercato è

$$\{ \vec{x}_p + \vec{x} \mid \vec{x} \in \ker A \} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$