Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

penalità	totale

16 Febbraio 2015 – tempo a disposizione : 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.[9pt.] Determinare l'insieme S di tutte le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} 4z^2 = \bar{z}^4 \\ \operatorname{Re}(z) \geq \operatorname{Im}(z) \end{cases}.$$

Determinare inoltre gli insiemi $S \cap \mathbb{R}$ e $T = \{z \in S : \ \exists u \in S, \exists v \in S \text{ tali che } u, v \neq 0 \text{ e } z = u + v\}$.

Soluzione

Osservo che $z_0 = 0$ è soluzione del sistema.
Ora cerco le altre soluzioni.
Risolvo l'equazione in forma polare: pongo $z = \rho e^{i\theta}$.
Ottengo $4\rho^2 e^{i2\theta} = \rho^4 e^{-i4\theta}$, dunque (poiché ho supposto $z \neq 0$) ottengo $\rho^2 = 4$ e $6\theta = 2k\pi \in [0, 2\pi)$ (per $k \in \mathbb{Z}$).
Ne deduco che le soluzioni non nulle dell'equazione sono:
$z_1 = 2e^{i0} = 2$
$z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$
$z_3 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$
$z_4 = 2e^{i\pi} = -2$
$z_5 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3}$
$z_6 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}$

Di queste, solo z_1, z_5, z_6 soddisfano la disuguaglianza.
Quindi in conclusione $S = \left\{0, 2, -1 - i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}\right\}$.

Ne segue che $S \cap \mathbb{R} = \{0, 2\}$ e, visto che $z_1 + z_5 = z_6$, che $T = \left\{1 - i\sqrt{3}\right\}$.

Esercizio 2. [15pt.] Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2a). Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare la matrice diagonalizzante e la forma diagonale.

(2b). Stabilire se B è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare la matrice diagonalizzante e la forma diagonale.

Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita come segue:

$$F(x, y, z) = (x, y, 3x + 4y + 2z).$$

(2c). Determinare la matrice associata a F rispetto alla base canonica.

(2d). F è diagonalizzabile? F è invertibile? In caso affermativo, trovare la matrice associata a F^{-1} rispetto a una base di autovettori di F.

(2e). Determinare, se esiste, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che B sia la matrice associata a F rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Soluzione

(2a).

Calcolo $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 (2-\lambda)$.

Calcolo la dimensione di $E_1(A)$:

$\dim(\mathrm{Ker}(A - I)) = 2$ in quanto la matrice $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango uguale a 1.

Dunque A è diagonalizzabile e la sua forma diagonale è $D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Per trovare la matrice diagonalizzante, calcolo una base di autovettori:

$E_1(A) = \text{span} < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$ e $E_2(A) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} < \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} >$.

Dunque la matrice diagonalizzante (che ha come colonne gli autovettori trovati) è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Verifichiamo che effettivamente $P^{-1}AP = D_A$.

(2b).

Rifaccio lo stesso procedimento per B.
Calcolo $p_B(\lambda) = (1-\lambda)^2 (2-\lambda)$.
Calcolo la dimensione di $E_1(B)$:

$\dim(\mathrm{Ker}(B-I)) = 2$ in quanto la matrice $B - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango uguale a 1.

Dunque B è diagonalizzabile e la sua forma diagonale è $D_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Per trovare la matrice diagonalizzante, calcolo una base di autovettori:

$E_1(B) = \mathrm{span} < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$ e

$E_2(A) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{span} < \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} >=$

$= \mathrm{span} < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} >$.

Dunque la matrice diagonalizzante (che ha come colonne gli autovettori trovati) è $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Verifichiamo che effettivamente $Q^{-1}BQ = D_B$.
Notiamo che $D_A = D_B$, dunque A e B sono simili.

(2c).

Osserviamo che la matrice associata a F rispetto alla base canonica non è altro che A.

(2d).

Poiché A è diagonalizzabile ed ha rango uguale a 3 (e dunque spazio nullo di dimensione 0, e dunque è sia iniettiva che surgettiva, e dunque invertibile), F è diagonalizzabile e invertibile.

Senza bisogno di fare ulteriori calcoli, so già che le colonne di P sono una base di autovettori e che rispetto a questa base, la matrice associata a F è $D = D_A$. In questa base, dunque, la matrice associata a F^{-1} non è altro che D^{-1}, che è facile da calcolare:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(2e).

Poiché B è simile a A, la base $\mathcal{B}$ esiste. Come trovarla? Poiché $D_A = D_B = D$, abbiamo che $B = QP^{-1}APQ^{-1}$.

Dunque la matrice $M = PQ^{-1}$ è la matrice del cambiamento di base che mi permette di avere B come matrice associata a F.

Dunque la base $\mathcal{B}$ cercata è data dalle colonne di M.

Facciamo il calcolo:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e dunque } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. **[10pt.]** Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3a). Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori (con la rispettiva molteplicità algebrica).

(3b). Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, determinare esplicitamente la dimensione di tutti gli autospazi.

(3c). Determinare l'insieme $T = \{k \in \mathbb{R} : \ A_k \text{ è diagonalizzabile}\}$.

(3d). Per tutti i k appartenenti a T, trovare una base di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori di A_k.

Soluzione

(3a).

$p_{A_k}(\lambda) = (k-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - k^2\right] = (k-\lambda)(\lambda - 1 + k)(\lambda - 1 - k)$.

Dunque gli autovalori sono $k, 1-k, 1+k$.

Se $k = 0$, allora $1-k = 1+k$, quindi in questo caso abbiamo l'autovalore 0 con molteplicità 1 e l'autovalore 1 con molteplicità 2.

Se $k = 1/2$, allora $k = 1-k$, quindi abbiamo l'autovalore $1/2$ con molteplicità 2 e l'autovalore $3/2$ con molteplicità 1.

Se $k \neq 0, 1/2$, allora i tre autovalori sono distinti, ciascuno con molteplicità 1.

(3b&c).

(i) Suppongo $k = 0$.

Mi resta da calcolare la dimensione di E_1:

$A_0 - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, quindi $\dim(E_1) = 1$ e $\dim(E_0) = 1$. Dunque A_0 non è diagonalizzabile.

(ii) Suppongo $k = 1/2$.

Mi resta da calcolare la dimensione di $E_{1/2}$:

$A_{1/2} - \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Poiché la terza riga è il doppio della prima, $\dim\left(E_{1/2}\right) = 2$ e $\dim\left(E_{3/2}\right) = 1$. Dunque $A_{1/2}$ è diagonalizzabile.

(iii) Suppongo $k \neq 0, 1/2$.

Gli autovalori sono distinti dunque $\dim(E_k) = \dim(E_{1-k}) = \dim(E_{1+k}) = 1$ e A_k è diagonalizzabile.

Ne segue che $T = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(3d).

Suppongo $k \neq 0, 1/2$ e considero i tre autospazi:

$$E_k = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1-k & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-k \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 2k-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{span} < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >.$$

$$E_{1-k} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} k & 0 & k^2 \\ 0 & 2k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} = \mathrm{span} < \begin{pmatrix} -k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >.$$

$$E_{1+k} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -k & 0 & k^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -k \end{pmatrix} = \mathrm{span} < \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >.$$

Ora consideriamo il caso $k = 1/2$. Osserviamo che, nei calcoli appena fatti, è sufficiente sostituire $k = 1/2$ e ottenere che:

$$E_{1/2} = \mathrm{span} < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \text{ e } E_{3/2} = \mathrm{span} < \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >.$$