Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

penalità	totale

16 Febbraio 2015 – tempo a disposizione : 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.[9pt.] Determinare l'insieme S di tutte le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} 4z^2 = \bar{z}^4 \\ \mathrm{Re}\,(z) \geq \mathrm{Im}\,(z) \end{cases} .$$

Determinare inoltre gli insiemi $S \cap \mathbb{R}$ e $T = \{z \in S : \ \exists u \in S, \exists v \in S \text{ tali che } u, v \neq 0 \text{ e } z = u + v\}$.

Esercizio 2. **[10pt.]** Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2a). Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori (con la rispettiva moltiplicità algebrica).

(2b). Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, determinare esplicitamente la dimensione di tutti gli autospazi.

(2c). Determinare l'insieme $T = \{k \in \mathbb{R} : A_k \text{ è diagonalizzabile}\}$.

(2d). Per tutti i k appartenenti a T, trovare una base di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori di A_k.

Esercizio 3. [15pt.] Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3a). Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare la matrice diagonalizzante e la forma diagonale.

(3b). Stabilire se B è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare la matrice diagonalizzante e la forma diagonale.

Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita come segue:

$$F(x, y, z) = (x, y, 3x + 4y + 2z).$$

(3c). Determinare la matrice associata a F rispetto alla base canonica.

(3d). F è diagonalizzabile? F è invertibile? In caso affermativo, trovare la matrice associata a F^{-1} rispetto a una base di autovettori di F.

(3e). Determinare, se esiste, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che B sia la matrice associata a F rispetto alla base $\mathcal{B}$.