Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

penalità	totale

09 Gennaio 2015 – tempo a disposizione : 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.[8pt.] Si determinino tutte le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} e^{3\bar{z}} - e^{-2z+1} = 0 \\ |\mathrm{Im}(5z - \overline{z})| < 5\mathrm{Re}\,(40z) \end{cases}$$

Risolvo la prima equazione: $e^{3\overline{z}+2z-1} = 1$.
Pongo $z = a + ib$.
$e^{3\overline{z}+2z-1} = e^{5a-1} \cdot e^{-ib} \Rightarrow a = 1/5,\ b = -2k\pi$.
Quindi le soluzioni della prima equazione sono $z = 1/5 - 2k\pi$, per $k \in \mathbb{Z}$.
Considero la disequazione.
$\mathrm{Im}\,(5z - \overline{z}) = -12k\pi$, quindi i soli valori di k che ci interessano sono $0, 1, -1$.
Il sistema ha dunque 3 soluzioni:
$z_1 = 1/5$
$z_2 = 1/5 - 2\pi$
$z_3 = 1/5 + 2\pi$

Esercizio 2. [8pt.] Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x, y, z) = (x + 2z, 2x + y + 3z, x - 3y + 5z).$$

(2a). [1pt.] Si determini la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.
(2b). [2pt.] Si determini la dimensione e una base dell'immagine di T.
(2c). [2pt.] Si determini la dimensione e una base del nucelo di T.
(2d). [3pt.] Si determini la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$.

(2a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(2b) e (2c)

La forma ridotta di Gauss è: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La dimensione dell'immagine è 2 e del nucleo è 1.

Una base dell'immagine è data dalle prime due colonne di A, ovvero $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Per una base del nucleo cerchiamo una soluzione speciale $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ e otteniamo $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2d)

La matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$ è data da $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Per fare il cambiamento di base dobbiamo calcolare $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Allora $B =$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. [8pt.] Date le matrici $C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$,

(3a). [2pt.] calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di C_1 e di C_2;
(3b). [2pt.] calcolare la dimensione degli autospazi;
(3c). [1pt.] stabilire se C_1 è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare la forma diagonale e una base di autovettori;
(3c). [3pt.] stabilire se C_2 è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare la forma diagonale e una base di autovettori.

(3a)
$p_{C_1}(\lambda) = (2-\lambda)^2$
$p_{C_2}(x) = -x^3 + 12x + 16 = -(x-4)(x+2)^2$
(3b&c&d)
$C_1 - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, quindi la dimensione dell'autospazio è 1 (non diagonalizzabile).

$$C_2 - 4I = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimensione di E_4 è 1 e un autovettore è dato da $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$C_2 + 2I = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimensione di E_{-2} è 2, quindi C_2 è diagonalizzabile. Una base di E_{-2} è data dalle due soluzioni speciali $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Gli autovettori trovati danno una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. **[8pt.]** Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k-3 & 2-k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2-k & k & 0 & k+2 \end{pmatrix}.$$

(4a). **[5pt.]** Determinare l'insieme $D = \{k \in \mathbb{R} : \ A_k \text{ è diagonalizzabile}\}$.
(4b). **[3pt.]** Per $k \in D$, determinare una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A_k.

(4a)
Calcolo il polinomio caratteristico $p_{A_k}(\lambda) = (1-\lambda)^2 (2-\lambda)^2$.
Calcolo la dimensione degli autospazi.

$$A_k - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ k-3 & -k & 0 & -k \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -k+2 & k & 0 & k \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & -k \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq 0$ allora $\dim(E_2) = 1$ e A_k non è diagonalizzabile.
Se $k = 0$ allora $\dim(E_2) = 2$ e devo vedere cosa succede con l'autovalore 1.

$$A_0 - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\dim(E_1) = 2$ quindi A_0 è diagonalizzabile.
Dunque $D = \{0\}$.
(4b)
Trovo una base di E_2 e una base di E_1 nel caso $k = 0$, trovando delle soluzioni speciali.

Per E_2, ottengo $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Per E_1 ottengo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$