Elementi di Teoria degli Insiemi — Prova scritta del 23 Luglio 2025

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Per ogni insieme A, denotiamo con $\mathcal{P}^{(n)}(A)$ la n-esima iterazione dell'operazione "parti":

$$\mathcal{P}^{(n)}(A) \;=\; \underbrace{\mathcal{P}(\cdots(\mathcal{P}}_{n \text{ volte}}(A))\cdots).$$

Senza usare l'assioma di scelta, dimostrare che se $|A \times A| = |A|$ e $A \neq \emptyset$ allora per ogni numero naturale $n \geq 1$ vale l'equipotenza $|\mathcal{P}^{(n)}(A) \times \mathcal{P}^{(n)}(A)| = |\mathcal{P}^{(n)}(A)|$.

Soluzione. Per induzione su $n \in \mathbb{N}$. La base $n = 1$ è data dall'ipotesi $|A \times A| = |A|$, visto che $\mathcal{P}^{(1)}(A) = \mathcal{P}(A)$. Al passo induttivo $n+1$, dobbiamo mostrare che $|\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)| = |\mathcal{P}(X)|$ dove $X = \mathcal{P}^{(n)}(A)$. La disuguaglianza $|\mathcal{P}(X)| \leq |\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)|$ è ovvia. Per ottenere l'altra disuguaglianza, notiamo che per ipotesi induttiva $|X| = |X \times X|$ e quindi $|\mathcal{P}(X)| = |\mathcal{P}(X \times X)|$; basta allora mostrare l'esistenza di una funzione iniettiva $g : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X \times X)$. Ma questo è facile, basta considerare $g : (A, B) \mapsto A \times B$.

Esercizio 2.

1. Caratterizzare le coppie di ordinali (α, β) tali che $\alpha + \omega^\omega = \beta + \omega^\omega$.

2. Dimostrare per induzione transfinita che per tutti gli ordinali $\alpha, \beta \neq 0$ dove almeno uno dei due è infinito, si ha che $|\alpha \cdot \beta| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

   [Si può assumere la proprietà $|\alpha + \beta| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ per tutti gli ordinali $\alpha, \beta \neq 0$ dove almeno uno dei due è infinito.]

3. Usando il punto (2), dimostrare per induzione transfinita che per tutti gli ordinali $\alpha > 1$ e $\beta > 0$ dove almeno uno dei due è infinito, si ha che $|\alpha^\beta| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

Soluzione. (1). Sono le coppie (α, β) dove $\alpha = \beta + \gamma$ per qualche $\gamma < \omega^\omega$ o $\beta = \alpha + \delta$ per qualche $\delta < \omega^\omega$. Infatti supponiamo senza perdita di generalità che $\alpha \geq \beta$; per differenza esiste ed unico ordinale γ tale che $\alpha = \beta + \gamma$. Se $\gamma < \omega^\omega$, allora $\alpha + \omega^\omega = \beta + (\gamma + \omega^\omega) = \beta + \omega^\omega$. Se invece $\gamma \geq \omega^\omega$, allora $\alpha + \omega^\omega \geq (\beta + \omega^\omega) + \omega^\omega > \beta + \omega^\omega$.

(2). Procediamo per induzione transfinita su β. Se $\beta = 1$ e $\alpha \neq 0$ allora per definizione $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot 1 = \alpha$ e quindi $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| = \max\{|\alpha|, 1\} = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. Se $\beta = \gamma + 1$ è successore, allora per definizione $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma + \alpha$ e quindi $|\alpha \cdot \beta| \leq |\alpha \cdot \gamma| + |\alpha| =$ (per ip. induttiva) $= \max\{|\alpha|, |\gamma|\} + |\alpha| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. Infatti se γ è finito, e quindi α è infinito, allora $|\alpha| = \max\{|\alpha|, |\gamma|\} = \max\{|\alpha|, |\gamma + 1|\}$. Infine, se β è limite, allora per definizione $\alpha \cdot \beta = \bigcup_{\gamma < \beta} \alpha \cdot \gamma$, e quindi usando l'ipotesi induttiva si ottiene: $|\alpha \cdot \beta| \leq \sum_{\gamma < \beta} |\alpha \cdot \gamma| = \max\{|\beta|, \sup_{\gamma < \beta} |\alpha \cdot \gamma|\} =$ (per ip. induttiva) $= \max\{|\beta|, \sup_{\gamma < \beta} \max\{|\alpha|, |\gamma|\}\} = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. Inoltre banalmente $\alpha, \beta \leq \alpha \cdot \beta$, quindi $|\alpha|, |\beta| \leq |\alpha \cdot \beta|$, e si ottiene anche l'altra disuguaglianza $\max\{|\alpha|, |\beta|\} \leq |\alpha \cdot \beta|$.

(3). La dimostrazione è del tutto simile al punto (2). Procediamo per induzione transfinita su β. Se $\beta = 1$ e $\alpha \neq 0$ allora per definizione $\alpha^\beta = \alpha^1 = \alpha$ e quindi $|\alpha^\beta| = |\alpha| = \max\{|\alpha|, 1\} = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. Se $\beta = \gamma + 1$ è successore, allora per definizione $\alpha^\beta = \alpha^\gamma \cdot \alpha$ e quindi $|\alpha^\beta| = |\alpha^\gamma \cdot \alpha| =$ (per la (2)) $= \max\{|\alpha^\gamma|, |\alpha|\} =$ (per ip. induttiva) $= \max\{|\alpha|, |\gamma|\}$. Infine, se β è limite, allora per definizione $\alpha^\beta = \bigcup_{\gamma < \beta} \alpha^\gamma$, e quindi usando l'ipotesi induttiva si ottiene: $|\alpha^\beta| \leq \sum_{\gamma < \beta} |\alpha^\gamma| = \max\{|\beta|, \sup_{\gamma < \beta} |\alpha^\gamma|\} =$ (per ip. induttiva) $= \max\{|\beta|, \sup_{\gamma < \beta} \max\{|\alpha|, |\gamma|\}\} = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. Inoltre, visto che $\alpha > 1$, banalmente $\alpha, \beta \leq \alpha^\beta$, quindi $|\alpha|, |\beta| \leq |\alpha^\beta|$, e si ottiene anche l'altra disuguaglianza $\max\{|\alpha|, |\beta|\} \leq |\alpha^\beta|$.

Esercizio 3.

1. Sia λ un ordinale limite, e sia $(\kappa_\alpha \mid \alpha < \lambda)$ una sequenza strettamente crescente di cardinali. Dimostrare che vale la disuguaglianza stretta $\sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha < \prod_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$.

2. Sia $(\kappa_i \mid i \in I)$ una sequenza di cardinali infiniti, e supponiamo che $\kappa := \sum_{i\in I} \kappa_i > \kappa_j$ per ogni $j \in I$. Dimostrare che allora $\kappa < \kappa^{|I|}$.

3. Assumiamo che $2^{\aleph_n} = \aleph_{\omega+1}$ per ogni $n \in \omega$. Dimostrare che allora anche $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+1}$.

4. Dimostrare che $(\aleph_{\omega_1+\omega})^{\aleph_1} = \max\{(\aleph_{\omega_1})^{\aleph_1}, (\aleph_{\omega_1+\omega})^{\aleph_0}\}$.

Soluzione. (1). Per l'ipotesi, $\kappa_\alpha < \kappa_{\alpha+1}$ per ogni α e quindi, per il teorema di König, $\sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha < \prod_{\alpha<\lambda} \kappa_{\alpha+1}$. Infine, osserviamo che $\prod_{\alpha<\lambda} \kappa_{\alpha+1} \le \prod_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$. Infatti, visto che λ è limite, possiamo definire una funzione iniettiva $g : \bigtimes_{\alpha<\lambda} \kappa_{\alpha+1} \to \bigtimes_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$ ponendo $g : (x_{\alpha+1} \mid \alpha \in \lambda) \mapsto (x_\alpha \mid \alpha \in \lambda)$.

(2). Per il teorema di König, da $\kappa_i < \mu$ per ogni $i \in I$ segue che $\kappa = \sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \kappa = \kappa^{|I|}$.

(3). $2^{\aleph_\omega} = 2^{\sum_{n<\omega} \aleph_n} = \prod_{n<\omega} 2^{\aleph_n} = \prod_{n<\omega} \aleph_{\omega+1} = (\aleph_{\omega+1})^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+1}$.

(4). Valgono le seguenti uguaglianze:

$$(\aleph_{\omega_1+\omega})^{\aleph_1} = \left((\aleph_{\omega_1+\omega})^{\aleph_0}\right)^{\aleph_1} = \left(\prod_{n<\omega} \aleph_{\omega_1+n}\right)^{\aleph_1} = \prod_{n<\omega} (\aleph_{\omega_1+n})^{\aleph_1} = \text{(Hausdorff)} = \prod_{n<\omega} \left((\aleph_{\omega_1})^{\aleph_1} \cdot \aleph_{\omega_1+n}\right) =$$
$$= \prod_{n<\omega} (\aleph_{\omega_1})^{\aleph_1} \cdot \prod_{n<\omega} \aleph_{\omega_1+n} = \left((\aleph_{\omega_1})^{\aleph_1}\right)^{\aleph_0} \cdot (\aleph_{\omega_1+\omega})^{\aleph_0} = \max\{(\aleph_{\omega_1})^{\aleph_1}, (\aleph_{\omega_1+\omega})^{\aleph_0}\}.$$

Esercizio 4.

1. Determinare tutte le coppie di ordinali (α, β) che soddisfano la seguente proprietà:
   - Ogni funzione f con $\mathrm{dom}(f) \subseteq V_\alpha$ e $\mathrm{Imm}(f) \subseteq \beta$ appartiene a V_β.

2. Determinare per quali ordinali α vale la seguente proprietà:
   - Ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \alpha$ appartiene a V_α.

3. Sia λ è un ordinale limite. Dimostrare che

$$\left| \bigcup_{A,B\in V_\lambda} \mathrm{Fun}(A, B) \right| = |V_\lambda|.$$

Soluzione. (1). La coppia (α, β) soddisfa le proprietà richieste se e solo se $|V_\alpha| < \mathrm{cof}(\beta)$.

Infatti se $|V_\alpha| \ge \mathrm{cof}(\beta)$ allora possiamo prendere una funzione $f : V_\alpha \to \beta$ illimitata. Se per assurdo fosse $f \in V_\beta$ allora anche $\bigcup \mathrm{Imm}(f) = \beta \in V_\beta$, assurdo.

Supponiamo invece $|V_\alpha| < \mathrm{cof}(\beta)$. Se $\alpha = 0$, $|V_\alpha| = 0$, quindi $|V_\alpha| < \mathrm{cof}(\beta)$ è soddisfatta da ogni ordinale $\beta \ge 1$. La condizione richiesta vale banalmente perché in questo caso l'unica funzione f da considerare è la funzione $f = \emptyset$ che appartiene e a V_β. Se $\alpha \ge 1$, allora $|V_\alpha| < \mathrm{cof}(\beta)$ implica che $\alpha < \beta$ e β è limite. In questo caso, $\mathrm{dom}(f) \subseteq V_\alpha \in V_\beta \Rightarrow \mathrm{dom}(f) \in V_\beta$. Inoltre $|\mathrm{dom}(f)| \le |V_\alpha| < \mathrm{cof}(\beta) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) \subseteq \gamma$ per un opportuno $\gamma < \beta$, e quindi $\mathrm{Imm}(f) \in V_{\gamma+1} \subseteq V_\beta$. Visto che $f \subseteq \mathrm{dom}(f) \times \mathrm{Imm}(f) \in V_\beta$, possiamo concludere $f \in V_\beta$.

(2). Ricordiamo che l'insieme degli interi $\mathbb{Z}$ è definito come opportuno quoziente di del prodotto $\omega \times \omega$; l'insieme dei razionali $\mathbb{Q}$ è definito come opportuno quoziente del prodotto $\mathbb{Z} \times \omega$; e l'insieme dei reali $\mathbb{R}$ è definito come un opportuno sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ (cioè i tagli di Dedekind). Di conseguenza, è facile verificare che $\mathbb{R} \in V_{\omega+\omega}$.

In modo del tutto analogo al punto (1) si dimostra che la condizione richiesta vale se e solo se $\mathfrak{c} < \operatorname{cof}(\alpha)$. Infatti se $\mathfrak{c} < \operatorname{cof}(\alpha)$ allora certamente α è limite e $\alpha \geq \omega_1$, in particolare $\mathbb{R} \in V_\alpha$. Inoltre $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| < \operatorname{cof}(\alpha) \Rightarrow \operatorname{Im}(f) \subseteq \gamma$ per un opportuno $\gamma < \alpha$, e quindi $\operatorname{Imm}(f) \in V_{\gamma+1} \subseteq V_\alpha$. Visto che $f \subseteq \operatorname{dom}(f) \times \operatorname{Imm}(f) \in V_\alpha$, possiamo concludere che $f \in V_\alpha$. Se invece $\mathfrak{c} \geq \operatorname{cof}(\alpha)$ allora possiamo prendere una funzione $f : \mathbb{R} \to \alpha$ illimitata. Se per assurdo fosse $f \in V_\alpha$ allora anche $\bigcup \operatorname{Imm}(f) = \alpha \in V_\alpha$, assurdo.

(3). Osserviamo che se λ è limite, allora per tutti gli $A, B \in V_\lambda$ si ha che $\operatorname{Fun}(A, B) \in V_\lambda$ e quindi $|\operatorname{Fun}(A, B)| < |V_\lambda|$. Abbiamo quindi:

$$\left| \bigcup_{A,B \in V_\lambda} \operatorname{Fun}(A, B) \right| \leq \sum_{(A,B) \in V_\lambda \times V_\lambda} |\operatorname{Fun}(A, B)| \;=\; \max \left\{ \sup_{(A,B) \in V_\lambda \times V_\lambda} |\operatorname{Fun}(A, B)| \,;\, |V_\lambda \times V_\lambda| \right\} = |V_\lambda|.$$

Per l'altra disuguaglianza basta notare che

$$|V_\lambda| = \left| \bigcup_{\alpha < \lambda} V_\alpha \right| \leq \left| \bigcup_{\alpha < \lambda} \operatorname{Fun}(V_\alpha, V_\alpha) \right| \leq \left| \bigcup_{A,B \in V_\lambda} \operatorname{Fun}(A, B) \right|.$$