Elementi di Teoria degli Insiemi — Prova scritta del 23 Luglio 2025

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Per ogni insieme A, denotiamo con $\mathcal{P}^{(n)}(A)$ la n-esima iterazione dell'operazione "parti":

$$\mathcal{P}^{(n)}(A) \;=\; \underbrace{\mathcal{P}(\cdots(\mathcal{P}}_{n \text{ volte}}(A))\cdots).$$

Senza usare l'assioma di scelta, dimostrare che se $|A\times A| = |A|$ e $Ane\emptyset$ allora per ogni numero naturale $n \geq 1$ vale l'equipotenza $|\mathcal{P}^{(n)}(A) \times \mathcal{P}^{(n)}(A)| = |\mathcal{P}^{(n)}(A)|$.

Esercizio 2.

1. Caratterizzare le coppie di ordinali (α, β) tali che $\alpha + \omega^\omega = \beta + \omega^\omega$.
2. Dimostrare per induzione transfinita che per tutti gli ordinali $\alpha, \beta \neq 0$ dove almeno uno dei due è infinito, si ha che $|\alpha \cdot \beta| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

   [Si può assumere la proprietà $|\alpha + \beta| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ per tutti gli ordinali $\alpha, \beta \neq 0$ dove almeno uno dei due è infinito.]
3. Usando il punto (2), dimostrare per induzione transfinita che per tutti gli ordinali $\alpha > 1$ e $\beta > 0$ dove almeno uno dei due è infinito, si ha che $|\alpha^\beta| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

Esercizio 3.

1. Sia λ un ordinale limite, e sia $(\kappa_\alpha \mid \alpha < \lambda)$ una sequenza strettamente crescente di cardinali. Dimostrare che vale la disuguaglianza stretta $\sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha < \prod_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$.
2. Sia $(\kappa_i \mid i \in I)$ una sequenza di cardinali infiniti, e supponiamo che $\mu := \sum_{i\in I} \kappa_i > \kappa_j$ per ogni $j \in I$. Dimostrare che allora $\kappa < \kappa^{|I|}$.
3. Assumiamo che $2^{\aleph_n} = \aleph_{\omega+1}$ per ogni $n \in \omega$. Dimostrare che allora anche $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+1}$.
4. Dimostrare che $(\aleph_{\omega_1+\omega})^{\aleph_1} = \max\{(\aleph_{\omega_1})^{\aleph_1}, (\aleph_{\omega_1+\omega})^{\aleph_0}\}$.

Esercizio 4.

1. Determinare per quali ordinali α vale la seguente proprietà:
   - Ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \alpha$ appartiene a V_α.
2. Determinare tutte le coppie di ordinali (α, β) che soddisfano la seguente proprietà:
   - Ogni funzione f con $\mathrm{dom}(f) \subseteq V_\alpha$ e $\mathrm{Imm}(f) \subseteq \beta$ appartiene a V_β.
3. Sia λ è un ordinale limite. Dimostrare che

$$\left| \bigcup_{A,B\in V_\lambda} \mathrm{Fun}(A, B) \right| = |V_\lambda|.$$