

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1.

1. Trovare tutti e soli gli ordinali α tali che $(\omega^2 + \omega) \cdot \alpha = \alpha$.
2. Sia $M = (\alpha, \in)$ un modello naturale il cui universo è un ordinale $\alpha \neq 0$. Dimostrare che M soddisfa l'assioma delle parti se e solo se α è limite.
3. Se la funzione-classe $F : ORD \rightarrow ORD$ è normale (cioè strettamente crescente e continua ai limiti), allora per ogni cardinale infinito regolare ν esiste una classe propria di punti fissi $\alpha = F(\alpha)$ tali che $\text{cof}(\alpha) = \nu$.

Soluzione. (1). Gli ordinali con la proprietà richiesta sono tutti e soli gli ordinali multipli di ω^ω , cioè della forma $\alpha = \omega^\omega \cdot \vartheta$. Per dimostrarlo, usiamo la divisione euclidea per ω^ω , e scriviamo $\alpha = \omega^\omega \cdot \vartheta + \rho$ dove $\rho < \omega^\omega$. Osserviamo che $(\omega^2 + \omega) \cdot \omega^\omega = \omega^\omega$; infatti $\omega^\omega \leq (\omega^2 + \omega) \cdot \omega^\omega \leq \omega^3 \cdot \omega^\omega = \omega^{3+\omega} = \omega^\omega$. Quindi abbiamo:

$$(\omega^2 + \omega) \cdot \alpha = (\omega^2 + \omega) \cdot (\omega^\omega \cdot \vartheta + \rho) = (\omega^2 + \omega) \cdot \omega^\omega \cdot \vartheta + (\omega^2 + \omega) \cdot \rho = \omega^\omega \cdot \vartheta + (\omega^2 + \omega) \cdot \rho.$$

Ricordiamo che vale l'unicità della differenza a destra, cioè $\beta + \gamma = \beta + \gamma' \Leftrightarrow \gamma = \gamma'$. Quindi la quantità di sopra è uguale ad $\alpha = \omega^\omega \cdot \vartheta + \rho$ se e solo se $(\omega^2 + \omega) \cdot \rho = \rho$. Per completare la dimostrazione, resta da vedere che quest'ultima uguaglianza vale se e solo se $\rho = 0$. Da un lato, l'uguaglianza vale banalmente se $\rho = 0$; se invece $\rho \neq 0$, allora esiste $n \in \omega$ con $\omega^n \leq \rho < \omega^{n+1}$, e l'uguaglianza non vale visto che:

$$(\omega^2 + \omega) \cdot \rho \geq (\omega^2 + \omega) \cdot \omega^n \geq \omega^2 \cdot \omega^n = \omega^{n+2} > \omega^{n+1} > \rho.$$

(2). Sia $\alpha = \beta + 1$ un successore, e supponiamo per assurdo che $(\alpha, \in)$ soddisfi l'assioma delle parti. Visto che $\beta \in \alpha$, esisterebbe $\gamma \in \alpha$ tale che $(\alpha, \in) \models \text{"}\gamma = \mathcal{P}(\beta)\text{"}$, ed avremmo in particolare che $(\alpha, \in) \models \text{"}\beta \in \mathcal{P}(\beta) = \gamma\text{"}$. Questo è assurdo perché $\beta \in \gamma \in \alpha = \beta + 1$ non è possibile.

Supponiamo ora α limite. Per ogni $\beta \in \alpha$ devo dimostrare che $(\alpha, \in) \models \text{"}\exists \gamma \gamma = \mathcal{P}(\beta)\text{"}$. Notiamo che per ogni $\delta \in \alpha$ si ha $(\alpha, \in) \models \text{"}\delta \subseteq \beta\text{"}$ se e solo se $\delta \leq \beta$, e che $\beta + 1 = \{\delta \in \alpha \mid \delta \leq \beta\}$. Poiché α è limite, $\beta + 1 \in \alpha$, e quindi $(\alpha, \in) \models \text{"}\beta + 1 = \mathcal{P}(\beta)\text{"}$.

(3). Per ogni ordinale β , definiamo per ricorsione transfinita la sequenza $(\alpha_{\beta, \gamma} \mid \gamma < \nu)$ ponendo:

$$\begin{cases} \alpha_{\beta, 0} = \beta \\ \alpha_{\beta, \gamma+1} = F(\alpha_{\beta, \gamma}) + 1 \\ \alpha_{\beta, \lambda} = \bigcup_{\gamma < \lambda} \alpha_{\beta, \gamma} \text{ se } \lambda < \nu \text{ limite.} \end{cases}$$

Allora $\alpha_\beta := \bigcup_{\gamma < \nu} \alpha_{\beta, \gamma}$ è un punto fisso della funzione F di cofinalità ν . Infatti, si dimostra facilmente per induzione transfinita che la sequenza $(\alpha_{\beta, \gamma} \mid \gamma < \nu)$ è strettamente crescente, e per la continuità di F si ha che

$$F(\alpha_\beta) = F\left(\bigcup_{\gamma < \nu} \alpha_{\beta, \gamma}\right) = \bigcup_{\gamma < \nu} F(\alpha_{\beta, \gamma}) = \bigcup_{\gamma < \nu} F(\alpha_{\beta, \gamma}) + 1 = \bigcup_{\gamma < \nu} \alpha_{\beta, \gamma+1} = \alpha_\beta.$$

Visto che $(\alpha_{\beta, \gamma} \mid \gamma < \nu)$ è crescente e illimitata in α_β , si ha $\text{cof}(\alpha_\beta) \leq \nu$. Supponiamo per assurdo che $\mu := \text{cof}(\alpha_\beta) < \nu$ e prendiamo $(\xi_i \mid i < \mu)$ sequenza illimitata in α_β . Se per ogni $i \in \mu$ definiamo $\gamma_i := \min\{\gamma \in \nu \mid \alpha_{\beta, \gamma} > \xi_i\}$ allora è immediato verificare che $(\gamma_i \mid i \in \mu)$ è illimitata in ν , e perciò $\mu \geq \text{cof}(\nu) = \nu$, assurdo.

Esercizio 2.

1. Dimostrare che se κ è un limite forte, allora per ogni famiglia di insiemi $\mathcal{B}$ con $|\mathcal{B}| < \kappa$, anche la σ -algebra generata $\langle \mathcal{B} \rangle$ ha cardinalità $|\langle \mathcal{B} \rangle| < \kappa$.
2. Determinare tutti e soli i cardinali infiniti κ per i quali vale la seguente proprietà:
 - Per ogni famiglia infinita di insiemi $\mathcal{B} \in V_\kappa$, ogni funzione $f : \langle \mathcal{B} \rangle \rightarrow \kappa$ appartiene a V_κ .

Soluzione. (1). Come abbiamo visto a lezione nel caso dei Boreliani (che sono la σ -algebra generata dagli aperti di $\mathbb{R}^n$), la σ -algebra generata da una famiglia infinita di insiemi $\mathcal{B}$ si può definire ponendo $\langle \mathcal{B} \rangle := \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathcal{B}_\alpha$ dove, per ricorsione transfinita su ω_1 :

$$\begin{cases} \mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \\ \mathcal{B}_{\alpha+1} = \mathcal{B}_\alpha \cup \{X^c \mid X \in \mathcal{B}_\alpha\} \cup \{\bigcup_{n < \omega} X_n \mid X_n \in \mathcal{B}_\alpha\} \cup \{\bigcap_{n < \omega} X_n \mid X_n \in \mathcal{B}_\alpha\} \\ \mathcal{B}_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{B}_\alpha \quad \text{se } \lambda \text{ è limite.} \end{cases}$$

Per ogni $\alpha < \omega_1$, si dimostra per induzione transfinita che $|\mathcal{B}_\alpha| = |\mathcal{B}|^{\aleph_0}$ per ogni $\alpha > 0$, e quindi

$$|\langle \mathcal{B} \rangle| = \left| \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathcal{B}_\alpha \right| \leq \sum_{\alpha < \omega_1} |\mathcal{B}_\alpha| = \max \left\{ \sup_{\alpha < \omega_1} |\mathcal{B}_\alpha|; \aleph_1 \right\} = |\mathcal{B}|^{\aleph_0}.$$

Se κ è un limite forte, da $|\mathcal{B}| < \kappa$ segue che $|\langle \mathcal{B} \rangle| = |\mathcal{B}|^{\aleph_0} \leq 2^{|\mathcal{B}|} < \kappa$.

(2). Dimosteremo che κ soddisfa le proprietà richieste se e solo se κ è un cardinale fortemente inaccessibile. Anzitutto notiamo che se $\kappa = \aleph_0$ allora la tesi è vera a vuoto perché non esistono famiglie infinite $\mathcal{B} \in V_\omega$. Supponiamo dunque $\kappa > \aleph_0$.

Notiamo che $\mathcal{B} \in V_\kappa \Rightarrow \langle \mathcal{B} \rangle \in V_\kappa$. Infatti supponiamo $\mathcal{B} \in V_\kappa$, quindi $\mathcal{B} \in V_\alpha$ per un opportuno $\alpha < \kappa$. Sia $X := \bigcup \mathcal{B}$. È facile verificare che $X \in V_\alpha$, e che $\langle \mathcal{B} \rangle \subseteq \mathcal{P}(X) \in V_{\alpha+1}$, e quindi $\langle \mathcal{B} \rangle \in V_{\alpha+1} \subseteq V_\kappa$.

Adesso ricordiamo la seguente proprietà generale, che abbiamo visto a lezione, riguardante la gerarchia di von Neumann:

- Sia λ un ordinale limite. Una funzione f appartiene a V_λ se e solo se sia $\text{dom}(f)$ che $\text{Imm}(f)$ appartengono a V_λ .

Nel nostro caso, stiamo considerando funzioni $f : \langle \mathcal{B} \rangle \rightarrow \kappa$ dove $\text{dom}(f) = \langle \mathcal{B} \rangle \in V_\kappa$, e quindi la condizione di sopra vale se e solo se $\text{Imm}(f) \subseteq \kappa$ è un insieme limitato in κ . Infatti se $\text{Imm}(f)$ è limitata, cioè se $\text{Imm}(f) \subseteq \alpha$ per qualche $\alpha < \kappa$, allora $\text{Imm}(f) \subseteq V_\alpha$ e quindi $\text{Imm}(f) \in V_{\alpha+1} \subseteq V_\kappa$. Viceversa, se l'insieme immagine $\text{Imm}(f)$ fosse illimitato in κ , allora non potrebbe appartenere a V_κ , altrimenti anche $\kappa = \sup_{b \in \text{Imm}(f)} f(b) = \bigcup \text{Imm}(f) \in V_\kappa$, il che è assurdo.

Segue direttamente dalla definizione di cofinalità che tutte le funzioni $f : \langle \mathcal{B} \rangle \rightarrow \kappa$ sono limitate se e solo se $|\langle \mathcal{B} \rangle| = |\mathcal{B}|^{\aleph_0} < \text{cof}(\kappa)$.

Osserviamo inoltre che le possibili cardinalità delle famiglie infinite $\mathcal{B} \in V_\kappa$ sono tutti e soli i cardinali infiniti $\mu < \beth_\kappa$. Infatti, se $\mathcal{B} \in V_\kappa$, allora esiste $\alpha < \kappa$ con $\mathcal{B} \subseteq V_\alpha$, e quindi $|\mathcal{B}| \leq |V_\alpha| = \beth_\alpha < \beth_\kappa$. Viceversa, se $\mu < \beth_\kappa$, allora esiste $\alpha < \kappa$ con $\mu < \beth_\alpha$; e visto che $|V_\alpha| = \beth_\alpha$, esiste una famiglia infinita $\mathcal{B} \subseteq V_\alpha$ di cardinalità μ .¹ Chiaramente, $\mathcal{B} \subseteq V_\alpha \in V_\kappa \Rightarrow \mathcal{B} \in V_\kappa$.

Mettendo insieme le considerazioni fatte sopra, possiamo concludere che i cardinali infiniti $\kappa > \aleph_0$ che stiamo cercando sono quelli che soddisfano la seguente proprietà:

(†) Per ogni cardinale infinito $\mu < \beth_\kappa$, si ha $\mu^{\aleph_0} < \text{cof}(\kappa)$.

¹ Ricordiamo che, come visto a lezione, $|V_\alpha| = \beth_\alpha$ per ogni $\alpha \geq \omega^2$, e qui possiamo supporre senza perdita di generalità che l'ordinale α considerato sia $\alpha \geq \omega^2$.

Resta da verificare che κ soddisfa $(\dagger)$ se e solo se κ è un cardinale fortemente inaccessibile. Ricordiamo che, come visto a lezione, κ è fortemente inaccessibile se e solo se κ è un punto fisso regolare della funzione “beth”.

Se κ è inaccessibile, e $\mu < \beth_\kappa = \kappa$, allora banalmente $\mu^{\aleph_0} \leq \mu^\mu < \kappa = \text{cof}(\kappa)$. Viceversa, se vale $(\dagger)$ allora per ogni $\alpha < \kappa$ abbiamo che $\beth_\alpha \leq (\beth_\alpha)^{\aleph_0} < \text{cof}(\kappa)$ e quindi $\beth_\kappa = \bigcup_{\alpha < \kappa} \beth_\alpha \leq \text{cof}(\kappa)$. Ma allora $\text{cof}(\kappa) \leq \kappa \leq \beth_\kappa \leq \text{cof}(\kappa)$, quindi $\kappa = \beth_\kappa$ e $\text{cof}(\kappa) = \kappa$, cioè κ è un punto fisso regolare della funzione “beth”.

Esercizio 3. Dimostrare le seguenti proprietà:

1. Non esistono funzioni strettamente crescenti $f : \omega_1 + \omega_1 \rightarrow \omega_1$.
2. Ogni funzione strettamente crescente $f : \omega_1 + \omega_1 \rightarrow \omega_1 + \omega_1$ è tale che $f[\omega_1] \subseteq \omega_1$.
3. Sia κ un cardinale regolare infinito e sia λ un ordinale limite. Allora esistono funzioni strettamente crescenti e illimitate $f : \kappa \rightarrow \lambda$ se e solo se $\text{cof}(\lambda) = \kappa$.

Soluzione. (1). Visto che f è iniettiva, l'insieme $\{f(\alpha) \mid \alpha < \omega_1\} \subseteq \omega_1$ ha cardinalità ω_1 , e quindi è illimitato. Non è quindi possibile che f sia crescente in $\omega_1 \in \omega_1 + \omega_1$, cioè che $f(\omega_1) > f(\alpha)$ per ogni $\alpha < \omega_1$.

Un modo alternativo per risolvere è usare la seguente proprietà dimostrata a lezione:

- Se α è un ordinale e $f : \alpha \rightarrow \alpha$ è una funzione crescente, allora $\gamma \leq f(\gamma)$ per ogni $\gamma \in \alpha$.

Visto che la restrizione $f|_{\omega_1} : \omega_1 \rightarrow \omega_1$ è crescente, per la proprietà di sopra $f(\gamma) \geq \gamma$ per ogni $\gamma < \omega_1$, e si avrebbe che $f(\omega_1) \geq \sup_{\gamma < \omega_1} f(\gamma) \geq \sup_{\gamma < \omega_1} \gamma = \omega_1$.

(2). Se per assurdo esistesse $\alpha < \omega_1$ con $f(\alpha) \geq \omega_1$, allora dalla crescita di f seguirebbe che $f(\alpha + \beta) \geq f(\alpha) + \beta \geq \omega_1 + \beta$ per ogni $\beta < \omega_1$. (Notiamo che $\alpha, \beta < \omega_1 \Rightarrow \alpha + \beta < \omega_1$.) Questo è assurdo perché allora avremmo $f(\omega_1) \geq \sup_{\beta < \omega_1} f(\alpha + \beta) \geq \sup_{\beta < \omega_1} \omega_1 + \beta = \omega_1 + \omega_1$.

(3). Se $\text{cof}(\lambda) = \kappa$, allora l'esistenza di funzioni crescenti $f : \kappa \rightarrow \lambda$ vale banalmente per la definizione di cofinalità. Viceversa, supponiamo che esista una funzione strettamente crescente e illimitata $f : \kappa \rightarrow \lambda$, dunque $\text{cof}(\lambda) \leq \kappa$. Supponiamo per assurdo che $\text{cof}(\lambda) < \kappa$, e prendiamo una funzione crescente ed illimitata $g : \mu \rightarrow \lambda$ dove il cardinale $\mu < \kappa$. Per ogni $\alpha \in \mu$ definiamo $\gamma_\alpha := \min\{\gamma \in \kappa \mid f(\gamma) > g(\alpha)\}$. È immediato verificare che $(\gamma_\alpha \mid \alpha \in \mu)$ è illimitata in κ , e perciò $\mu \geq \text{cof}(\kappa) = \kappa$, assurdo.

Esercizio 4. Sia $\gamma < \omega_1$. Dimostrare che $\prod_{\alpha \leq \gamma} \aleph_\alpha = (\aleph_\gamma)^{|\gamma|}$.

Soluzione. Se $\gamma = n \in \omega$ è finito, allora la tesi vale banalmente perché

$$\prod_{\alpha \leq \gamma} \aleph_\alpha = \aleph_0 \cdot \dots \cdot \aleph_n = \max\{\aleph_0, \dots, \aleph_n\} = \aleph_n = (\aleph_n)^n.$$

Supponiamo ora γ limite. Intanto si ha $\prod_{\alpha \leq \gamma} \aleph_\alpha \leq \prod_{\alpha \leq \gamma} \aleph_\gamma = (\aleph_\gamma)^{|\gamma|+1} = (\aleph_\gamma)^{|\gamma|}$. Per l'altra disuguaglianza, osserviamo che $\text{cof}(\gamma) = \aleph_0$; possiamo quindi prendere una sequenza crescente $(\gamma_n \mid n \in \omega)$ tale che $\sup_{n < \omega} \gamma_n = \gamma$. Usando la formula per i prodotti infiniti vista a lezione, si ottiene: $\prod_{\alpha \leq \gamma} \aleph_\alpha \geq \prod_{n < \omega} \aleph_{\gamma_n} = (\sup_{n < \omega} \aleph_{\gamma_n})^{\aleph_0} = (\aleph_\gamma)^{|\gamma|}$.

Resta da considerare il caso in cui $\gamma > \omega$ è successore. Scriviamo $\gamma = \lambda + n$ dove λ è limite e $0 < n < \omega$. Per quanto visto sopra, $\prod_{\alpha \leq \lambda} \aleph_\alpha = (\aleph_\lambda)^{|\lambda|}$. Inoltre, il prodotto finito $\prod_{i=0}^n \aleph_{\lambda+i} = \aleph_{\lambda+n}$. Infine, usando la formula di Hausdorff, possiamo concludere:

$$(\aleph_{\lambda+n})^{|\lambda+n|} = (\aleph_{\lambda+n})^{|\lambda|} = (\aleph_\lambda)^{|\lambda|} \cdot \aleph_{\lambda+n} = \left(\prod_{\alpha < \lambda} \aleph_\alpha \right) \cdot \prod_{i=0}^n \aleph_{\lambda+i} = \prod_{\alpha < \gamma} \aleph_\alpha.$$