Elementi di Teoria degli Insiemi — Prova scritta del 4 Giugno 2025

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1.

1. Trovare tutti e soli gli ordinali α tali che $(\omega^2 + \omega) \cdot \alpha = \alpha$.
2. Sia $M = (\alpha, \in)$ un modello naturale il cui universo è un ordinale $\alpha \neq 0$. Dimostrare che M soddisfa l'assioma delle parti se e solo se α è limite.
3. Se la funzione-classe $F : ORD \to ORD$ è normale (cioè strettamente crescente e continua ai limiti), allora per ogni cardinale infinito regolare ν esiste una classe propria di punti fissi $\alpha = F(\alpha)$ tali che $\mathrm{cof}(\alpha) = \nu$.

Esercizio 2.

1. Dimostrare che se κ è un limite forte, allora per ogni famiglia infinita di insiemi $\mathcal{B}$ con $|\mathcal{B}| < \kappa$, anche la σ-algebra generata $\langle \mathcal{B} \rangle$ ha cardinalità $|\langle \mathcal{B} \rangle| < \kappa$.
2. Determinare tutti e soli i cardinali infiniti κ per i quali vale la seguente proprietà:
   - Per ogni famiglia infinita di insiemi $\mathcal{B} \in V_\kappa$, ogni funzione $f : \langle \mathcal{B} \rangle \to \kappa$ appartiene a V_κ.

Esercizio 3. Dimostrare le seguenti proprietà:

1. Non esistono funzioni strettamente crescenti $f : \omega_1 + \omega_1 \to \omega_1$.
2. Ogni funzione strettamente crescente $f : \omega_1 + \omega_1 \to \omega_1 + \omega_1$ è tale che $f[\omega_1] \subseteq \omega_1$.
3. Sia κ un cardinale regolare infinito e sia λ un ordinale limite. Allora esistono funzioni strettamente crescenti e illimitate $f : \kappa \to \lambda$ se e solo se $\mathrm{cof}(\lambda) = \kappa$.

Esercizio 4. Sia $\gamma < \omega_1$. Dimostrare che $\prod_{\alpha \leq \gamma} \aleph_\alpha = (\aleph_\gamma)^{|\gamma|}$.