Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 26 Giugno 2024

Cognome e nome:..

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 punti] Calcola la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $X_1 := \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A$ bene ordinato $\}$.
2. $X_2 := \{(A_n \mid n \in \mathbb{N}) \mid A_n \subseteq \mathbb{R}^3$ per ogni $n \in \mathbb{N}\}$.
3. $X_3 := \{f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5 \mid f$ applicazione lineare$\}$.
4. $X_4 := \{f : \omega_1 \to \omega_2 \mid f$ strettamente crescente $\}$.

Soluzione. (1). $|X_1| = \mathfrak{c}$. Notiamo che se $A \subseteq \mathbb{R}$ è bene ordinato, allora $|A| \leq \aleph_0$. Infatti, per ogni $a \in A$ prendiamo q_a nell'intervallo $[a, a^+)$, dove a^+ è l'elemento successore di a in A. (Un tale q_a esiste per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.) Chiaramente la funzione $\theta : a \mapsto q_a$ è una funzione iniettiva da A in $\mathbb{Q}$ e quindi $|A| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_0$. Dunque X_1 è un sottoinsieme di $[\mathbb{R}]^{\leq\aleph_0}$, la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ al più numerabili. Abbiamo visto a lezione che $|[\mathbb{R}]^{\leq\aleph_0}| = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, e quindi $|X_1| \leq \mathfrak{c}$. L'altra disuguaglianza $\mathfrak{c} \leq |X_1|$ è immediata; ad esempio basta notare che ogni singoletto $\{r\} \in X_1$ al variare di $r \in \mathbb{R}$.

(2). $|X_2| = 2^{\mathfrak{c}}$. L'insieme $X_2 = \mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{R}^3))$ è l'insieme delle successioni di elementi dell'insieme delle parti $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$. Notiamo che $|\mathbb{R}^3| = \mathfrak{c}^3 = \mathfrak{c}$, e quindi $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)| = 2^{\mathfrak{c}}$; abbiamo dunque che $|X_2| = |\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)|^{\aleph_0} = (2^{\mathfrak{c}})^{\aleph_0} = 2^{\mathfrak{c}}$.

(3). $|X_3| = \mathfrak{c}$. L'insieme X_3 è in bigezione con l'insieme delle matrici 5×7 ad entrate reali, che a sua volta è in bigezione con $\mathbb{R}^{35}$. Dunque si ha che $|X_3| = |\mathbb{R}^{35}| = \mathfrak{c}^{35} = \mathfrak{c}$.

(4). $|X_4| = 2^{\aleph_1}$. Intanto notiamo che $X_4 \subseteq \mathrm{Fun}(\omega_1, \omega_2)$ e quindi $|X_4| \leq (\aleph_2)^{\aleph_1} =$ (per il Teor. Hausdorff) $= (\aleph_0)^{\aleph_1} \cdot \aleph_2 = 2^{\aleph_1} \cdot \aleph_2 = 2^{\aleph_1}$. Viceversa, per ogni $A \subseteq \omega_1$, consideriamo la sua funzione caratteristica $\chi_A : \omega_1 \to \{0, 1\}$, e definiamo $f_A : \omega_1 \to \omega_1$ ponendo $f_A(\alpha) = 2 \cdot \alpha + \chi_A(\alpha)$. Notiamo che $f_A \in X_4$; infatti per ogni $\alpha < \omega_1$ si ha che $f_A(\alpha) < 2 \cdot \alpha + 2 = 2 \cdot (\alpha + 1) \leq f_A(\alpha + 1)$. Allora possiamo concludere che $2^{\aleph_1} = |\mathcal{P}(\omega_1)| = |\{f_A \mid A \subseteq \omega_1\}| \leq |X_4|$.

Esercizio 2. [8 punti]

1. Scrivere in forma normale di Cantor l'ordinale $(\omega^3 \cdot 2 + 7)^3$.
2. Trovare quoziente e resto della divisione euclidea di $\omega^4 \cdot 2 + \omega^2 \cdot 6 + 5$ per $\omega^2 + 3$.

Soluzione. (1). $(\omega^3 \cdot 2 + 7)^3 = \omega^9 \cdot 2 + \omega^6 \cdot 14 + \omega^3 \cdot 14 + 7$. Abbiamo infatti:

$$(\omega^3 \cdot 2 + 7)^2 = (\omega^3 \cdot 2 + 7) \cdot (\omega^3 \cdot 2 + 7) = (\omega^3 \cdot 2 + 7) \cdot \omega^3 \cdot 2 + (\omega^3 \cdot 2 + 7) \cdot 7 =$$
$$= [(\omega^3 \cdot 2 + 7) \cdot \omega] \cdot \omega^2 \cdot 2 + \underbrace{(\omega^3 \cdot 2 + 7) + \ldots + (\omega^3 \cdot 2 + 7)}_{7 \text{ volte}} = \omega^4 \cdot \omega^2 \cdot 2 + (\omega^3 \cdot 2) \cdot 7 + 7 = \omega^6 \cdot 2 + \omega^3 \cdot 14 + 7.$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}(\omega^3\cdot 2+7)^3 &= (\omega^3\cdot 2+7)^2\cdot(\omega^3\cdot 2+7) = (\omega^6\cdot 2+\omega^3\cdot 14+7)\cdot(\omega^3\cdot 2+7) = \\ &(\omega^6\cdot 2+\omega^3\cdot 14+7)\cdot\omega^3\cdot 2+(\omega^6\cdot 2+\omega^3\cdot 14+7)\cdot 7 = \\ &[(\omega^6\cdot 2+\omega^3\cdot 14+7)\cdot\omega]\cdot\omega^2\cdot 2+\underbrace{(\omega^6\cdot 2+\omega^3\cdot 14+7)+\ldots+(\omega^6\cdot 2+\omega^3\cdot 14+7)}_{7\,\text{volte}} = \\ &= \omega^7\cdot\omega^2\cdot 2+\omega^6\cdot 2\cdot 7+\omega^3\cdot 14+7 = \omega^9\cdot 2+\omega^6\cdot 14+\omega^3\cdot 14+7.\end{aligned}$$

(2). Il quoziente è $\omega^2\cdot 2+6$ ed il resto è 2. Infatti:

$$(\omega^2+3)\cdot(\omega^2\cdot 2+6)+2 = (\omega^2+3)\cdot\omega^2\cdot 2+(\omega^2+3)\cdot 6+2 = \omega^4\cdot 2+(\omega^2\cdot 6+3)+2 = \omega^4\cdot 2+\omega^2\cdot 6+5.$$

Esercizio 3. [8 punti]

1. Supponiamo che $2^{\aleph_1} < \aleph_{\omega+\omega}$. Dimostrare che allora $(\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_1} = (\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0}$.
2. Dimostrare che per ogni $k < \omega$ si ha $(\aleph_\omega)^{\aleph_k} = \max\{2^{\aleph_k}, (\aleph_\omega)^{\aleph_0}\}$.

Soluzione. (1). La disuguaglianza $(\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0} \leq (\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_1}$ è banale. Usando la formula per i prodotti infiniti e il Teorema di Hausdorff, si ottiene che:

$$\begin{aligned}(\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_1} &= \left((\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0}\right)^{\aleph_1} = \left(\left(\sup_{n<\omega}\aleph_{\omega+n}\right)^{\aleph_0}\right)^{\aleph_1} = \left(\prod_{n<\omega}\aleph_{\omega+n}\right)^{\aleph_1} = \prod_{n<\omega}(\aleph_{\omega+n})^{\aleph_1} = \\ &= \prod_{n<\omega}((\aleph_\omega)^{\aleph_1}\cdot\aleph_{\omega+n}) = \left((\aleph_\omega)^{\aleph_1}\cdot\aleph_{\omega+\omega}\right)^{\aleph_0} = (\aleph_\omega)^{\aleph_1}\cdot(\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0} \leq (\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0}.\end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza segue dal fatto che, nelle nostre ipotesi, $(\aleph_\omega)^{\aleph_1} \leq (\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0}$. Infatti,

$$\begin{aligned}(\aleph_\omega)^{\aleph_1} &= \left((\aleph_\omega)^{\aleph_0}\right)^{\aleph_1} = \left(\prod_{n<\omega}\aleph_n\right)^{\aleph_1} = \prod_{n<\omega}(\aleph_n)^{\aleph_1} = \\ &= \prod_{n<\omega}(2^{\aleph_1}\cdot\aleph_n) = (2^{\aleph_1}\cdot\aleph_\omega)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}\cdot(\aleph_\omega)^{\aleph_0} \leq (\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0}.\end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato l'ipotesi $2^{\aleph_1} < \aleph_{\omega+\omega}$.

(2). Abbiamo la seguente catene di uguaglianze:

$$(\aleph_\omega)^{\aleph_k} = \left((\aleph_\omega)^{\aleph_0}\right)^{\aleph_k} = \left(\prod_{n<\omega}\aleph_n\right)^{\aleph_k} = \prod_{n<\omega}(\aleph_n)^{\aleph_k} = \prod_{n<\omega}(2^{\aleph_k}\cdot\aleph_n) = (2^{\aleph_k}\cdot\aleph_\omega)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_k}\cdot(\aleph_\omega)^{\aleph_0}.$$

Esercizio 4. [9 punti] Sia $f : \omega_2+\omega_1 \to \omega_2+\omega_1$ una funzione strettamente crescente. Dimostrare le seguenti proprietà:

1. Se $\gamma < \omega_2$ allora anche $f(\gamma) < \omega_2$.
2. Se f è continua ai limiti, allora f ammette $\aleph_2$ punti fissi.
3. Se f è continua ai limiti allora f ammette $\aleph_1$ punti fissi maggiori di ω_2.

Soluzione. (1). Supponiamo per assurdo che esista $\gamma < \omega_2$ tale che $f(\gamma) \geq \omega_2$. Per induzione transfinita, usando la crescenza di f si dimostra che per ogni $\alpha < \omega_2$ si ha $f(\gamma+\alpha) \geq f(\gamma)+\alpha \geq \omega_2+\alpha$. (Osserviamo che $\gamma < \omega_2 \Rightarrow \gamma + \alpha < \omega_2$ per ogni $\alpha < \omega_2$, e quindi $\gamma + \alpha$ appartiene al dominio di f.) Prendendo $\alpha = \omega_1$, si ottiene l'assurdo $f(\gamma + \omega_1) \geq \omega_2 + \omega_1$.

(2). In base al punto (1), la restrizione $g := f|_{\omega_2} : \omega_2 \to \omega_2$. Dimostriamo che per ogni $\alpha < \omega_2$ esiste $\beta \geq \alpha$ tale che $g(\beta) = \beta$. Questo è sufficiente a garantire la proprietà voluta. Infatti l'insieme dei punti fissi di g è allora un insieme illimitato di ω_2, e quindi ha cardinalità $\aleph_2$ poiché ω_2 è un cardinale regolare.

Definiamo per ricorsione numerabile la successione $(\beta_n \mid n \in \omega)$ ponendo $\beta_0 = \alpha$ e $\beta_{n+1} = g(\beta_n)$. Per la crescenza di g, si ha che $g(\gamma) \geq \gamma$ per ogni γ e quindi la sequenza $(\beta_n \mid n \in \omega)$ è debolmente crescente. Sia $\beta := \sup_{n<\omega} \beta_n$. Notiamo che $\beta < \omega_2$ perché $\mathrm{cof}(\omega_2) > \aleph_0$. Per l'ipotesi di continuità ai limiti, si ha che $g(\beta) = g(\sup_n \beta_n) = \sup_n g(\beta_n) = \sup_n \beta_{n+1} = \beta$.

(3). Vista la crescenza di f, abbiamo che $f(\omega_2) \geq \omega_2$. Consideriamo ora la funzione $h : \omega_1 \to \omega_1$ definita ponendo $h(\alpha) = f(\omega_2 + \alpha) - f(\omega_2)$, cioè $h(\alpha)$ è quell'unico ordinale tale che $f(\omega_2 + \alpha) = f(\omega_2)+h(\alpha)$. Notiamo che h è una funzione crescente; infatti se $\alpha < \alpha'$ allora $\omega_2+\alpha < \omega_2+\alpha'$, quindi $f(\omega_2 + \alpha) < f(\omega_2 + \alpha')$, cioè $f(\omega_2) + h(\alpha) < f(\omega_2) + h(\alpha')$, e possiamo concludere che $h(\alpha) < h(\alpha')$. Notiamo inoltre che h è continua ai limiti; infatti se $\lambda < \omega_1$ è un ordinale limite, si ha che

$$f(\omega_2) + h(\lambda) = f(\omega_2 + \lambda) = \bigcup_{\gamma<\lambda} f(\omega_2 + \gamma) = \bigcup_{\gamma<\lambda} f(\omega_2) + h(\gamma) = f(\omega_2) + \bigcup_{\gamma<\lambda} h(\gamma),$$

e quindi $h(\lambda) = \bigcup_{\gamma<\lambda} h(\gamma)$. Infine, analogamente a quanto visto per la funzione g nel punto (2), si dimostra che dalle ipotesi di crescenza e continuità ai limiti di h, segue l'esistenza di $\aleph_1$ punti fissi per la funzione h, e quindi di $\aleph_1$ punti fissi di f maggiori di ω_2.