Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 26 Giugno 2024

Cognome e nome:..

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

<u>Tutte le risposte devono essere giustificate</u>

Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 punti] Calcola la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $X_1 := \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ bene ordinato}\}$.
2. $X_2 := \{(A_n \mid n \in \mathbb{N}) \mid A_n \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\}$.
3. $X_3 := \{f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5 \mid f \text{ applicazione lineare}\}$.
4. $X_4 := \{f : \omega_1 \to \omega_2 \mid f \text{ strettamente crescente}\}$.

Esercizio 2. [8 punti]

1. Scrivere in forma normale di Cantor l'ordinale $(\omega^3 \cdot 2 + 7)^3$.
2. Trovare quoziente e resto della divisione euclidea di $\omega^4 \cdot 2 + \omega^2 \cdot 6 + 5$ per $\omega^2 + 3$.

Esercizio 3. [8 punti]

1. Supponiamo che $2^{\aleph_1} < \aleph_{\omega+\omega}$. Dimostrare che allora $(\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_1} = (\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0}$.
2. Dimostrare che per ogni $k < \omega$ si ha $(\aleph_\omega)^{\aleph_k} = \max\{2^{\aleph_k}, (\aleph_\omega)^{\aleph_0}\}$.

Esercizio 4. [9 punti] Sia $f : \omega_2 + \omega_1 \to \omega_2 + \omega_1$ una funzione strettamente crescente. Dimostrare le seguenti proprietà:

1. Se $\gamma < \omega_2$ allora anche $f(\gamma) < \omega_2$.
2. Se f è continua ai limiti, allora f ammette $\aleph_2$ punti fissi.
3. Se f è continua ai limiti allora f ammette $\aleph_1$ punti fissi maggiori di ω_2.