Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 3 Giugno 2024 - Soluzioni

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. [10 punti] Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $c_0 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \lim_{n\to\infty} f(n) = 0\}$.
2. $\ell^\infty = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists L \in \mathbb{R}^+ \text{ t.c. } |f(n)| \leq L \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\}$.
3. $X_1 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ è debolmente decrescente}\}$.
4. $X_2 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(1) = 1 \text{ e } n < f(n) < n^2 \text{ per ogni } n \geq 2\}$.

Soluzione. (1). Notiamo intanto che $|c_0| \leq |\mathrm{Fun}(\mathbb{N},\mathbb{R})| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{N}|} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Viceversa, per ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{N}$, sia $\chi_A : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ la sua funzione caratteristica, e sia $f_A : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la funzione dove $f_A(n) = \frac{\chi_A(n)}{n}$. È immediato verificare che $\lim_{n\to\infty} f_A(n) = 0$, e che la corrispondenza $A \mapsto f_A$ determina una funzione iniettiva da $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ in c_0. Otteniamo quindi anche l'altra disuguaglianza $\mathfrak{c} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |c_0|$.

(2). Basta notare che $c_0 \subset \ell^\infty$ e quindi $\mathfrak{c} = |c_0| \leq |\ell^\infty| \leq |\mathrm{Fun}(\mathbb{N},\mathbb{R})| = \mathfrak{c}$.

(3). Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una funzione debolmente decrescente e $f(0) = n$, allora $f \subset \mathbb{N} \times \{1,\dots,n\}$. Quindi $X_1 \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \mathbb{N} \times \{1,\dots,n\}$ è incluso in una unione numerabile di insiemi numerabili, e perciò $|X_1| \leq \aleph_0$. D'atra parte X_1 è infinito perché include tutte le funzioni costanti, e quindi concludiamo che $|X_1| = \aleph_0$.

(4). Una disuguaglianza è immediata: $|X_2| \leq |\mathrm{Fun}(\mathbb{N},\mathbb{N})| = (\aleph_0)^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Per mostrare l'altra disuguaglianza, usiamo una procedura del tutto simile a quelle viste sopra. Per ogni sottoinsieme $A \subseteq [3,+\infty)_{\mathbb{N}}$, consideriamo la funzione h_A definita ponendo:

$$h_A(n) = \begin{cases} 3 & \text{se } n = 2 \\ n + 1 + \chi_A(n) & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

È immediato verificare che $n < h_A(n) < n^2$ per ogni $n \geq 2$. Inoltre la corrispondenza $A \mapsto h_A$ determina una funzione iniettiva tra l'insieme $\mathcal{P}([3,+\infty)_{\mathbb{N}})$ e X_2, e quindi $\mathfrak{c} = |\mathcal{P}([3,+\infty)_{\mathbb{N}})| \leq |X_2|$.

Esercizio 2. [8 punti]

1. Scrivere il seguente ordinale in forma normale di Cantor: $(\omega^2 + \omega + 1)^2$.
2. Dimostrare che $\gamma \cdot \beta = \beta$ se e solo se esiste δ tale che $\beta = \gamma^\omega \cdot \delta$.

Soluzione. (1). Notiamo intanto che $(\omega^2 + \omega + 1) \cdot \omega = \omega^3$; infatti $\omega^2 \le \omega^2 + \omega + 1 \le \omega^2 \cdot 2$ e quindi

$$\omega^3 = \bigcup_{n<\omega} \omega^2 \cdot n \le \bigcup_{n<\omega} (\omega^2 + \omega + 1) \cdot n \le \bigcup_{n<\omega} (\omega^2 \cdot 2) \cdot n = \bigcup_{n<\omega} \omega^2 \cdot (2n) = \omega^3.$$

Si hanno allora le seguenti uguaglianze:

$$(\omega^2+\omega+1)^2 = (\omega^2+\omega+1)\cdot(\omega^2+\omega+1) = (\omega^2+\omega+1)\cdot\omega^2+(\omega^2+\omega+1)\cdot\omega+(\omega^2+\omega+1) = \omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1.$$

(2). Supponiamo prima che $\beta = \gamma^\omega \cdot \delta$. Allora

$$\gamma \cdot \beta = \gamma \cdot \gamma^\omega \cdot \delta = \gamma^{1+\omega} \cdot \delta = \gamma^\omega \cdot \delta = \beta.$$

Viceversa, per la divisione euclidea di β per γ^ω, esistono ed unici ordinali δ e $\rho < \gamma^\omega$ tali che $\beta = \gamma^\omega \cdot \delta + \rho$. Vogliamo mostrare che il resto $\rho = 0$. Se per assurdo fosse $\rho \ge 1$, allora da $\rho < \gamma^\omega = \bigcup_{n\in\omega} \gamma^n$ seguirebbe l'esistenza di un naturale $n \in \omega$ tale che $\gamma^n \le \rho < \gamma^{n+1}$. Ma allora avremmo che:

$$\gamma \cdot \beta = \gamma \cdot (\gamma^\omega \cdot \delta + \rho) = \gamma \cdot \gamma^\omega \cdot \delta + \gamma \cdot \rho = \gamma^{1+\omega} \cdot \delta + \rho \cdot \delta = \gamma^\omega \cdot \delta + \gamma \cdot \rho > \gamma^\omega \cdot \delta + \rho = \beta.$$

Infatti notiamo che $\gamma \cdot \rho \ge \gamma \cdot \gamma^n = \gamma^{n+1} > \rho$, e quindi $\gamma^\omega \cdot \delta + \gamma \cdot \rho > \gamma^\omega \cdot \delta + \rho$.

Esercizio 3. [10 punti] Supponiamo che valga l'*ipotesi generalizzata del continuo*, cioè che $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ per ogni α.

1. Dimostrare che: $(\aleph_n)^{\aleph_0} = \aleph_n$ per ogni $1 \le n < \omega$.
2. Dimostrare che: $(\aleph_n)^{\aleph_m} = \aleph_n$ per ogni $0 < m < n < \omega$.
3. Dimostrare che: $(\aleph_\omega)^{\aleph_m} = \aleph_{\omega+1}$ per ogni $0 \le m < \omega$.
4. Determinare il valore di $(\aleph_{\omega_1})^{\aleph_\alpha}$ al variare di $1 \le \alpha < \omega_1$.

Soluzione. (1). Con n applicazioni del Teorema di Hausdorff si ottiene che

$$(\aleph_n)^{\aleph_0} = (\aleph_0)^{\aleph_0} \cdot \aleph_n = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_n = \aleph_1 \cdot \aleph_n = \aleph_n.$$

(2). Con n applicazioni del Teorema di Hausdorff, ed usando il fatto che $m + 1 \le n$, si hanno le disuguaglianze

$$\aleph_n \le (\aleph_n)^{\aleph_m} = (\aleph_0)^{\aleph_m} \cdot \aleph_n = 2^{\aleph_m} \cdot \aleph_n = \aleph_{m+1} \cdot \aleph_n = \aleph_n.$$

(3). Ricordiamo che per ogni cardinale infinito κ si ha $k^{\mathrm{cof}(\kappa)} > \kappa$, e quindi $(\aleph_\omega)^{\aleph_0} > \aleph_\omega$. Abbiamo allora le disuguaglianze:

$$\aleph_{\omega+1} \le (\aleph_\omega)^{\aleph_0} \le (\aleph_\omega)^{\aleph_n} \le (\aleph_\omega)^{\aleph_\omega} = 2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+1}.$$

(4). Procediamo in modo analogo a sopra e mostriamo che $(\aleph_{\omega_1})^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\omega_1+1}$ per ogni $1 \le \alpha < \omega_1$. Visto che $\mathrm{cof}(\aleph_{\omega_1}) = \aleph_1$, si ha che $(\aleph_{\omega_1})^{\aleph_1} > \aleph_{\omega_1}$. Abbiamo allora le disuguaglianze:

$$\aleph_{\omega_1+1} \le (\aleph_{\omega_1})^{\aleph_1} \le (\aleph_{\omega_1})^{\aleph_\alpha} \le (\aleph_{\omega_1})^{\aleph_{\omega_1}} = 2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1+1}.$$

Esercizio 4. [8 punti]

1. Determinare il minimo α tale che l'insieme di funzioni $\mathrm{Fun}(\omega, \omega) \in V_\alpha$.
2. Dimostrare che la seguente proprietà vale se e solo se $\mathrm{cof}(\alpha) > \aleph_0$:

- Per ogni $A \subseteq V_\alpha$, se $|A| \leq \aleph_0$ allora $A \in V_\alpha$.

3. * È vero che per ogni cardinale limite forte κ, la famiglia dei suoi sottoinsiemi numerabili ha cardinalità κ? Se la risposta è si, darne una dimostrazione; se la risposta è no trovare un controesempio.

Soluzione. (1). Useremo più volte la seguente proprietà vista a lezione:

- Per ogni ordinale α si ha $\alpha \subseteq V_\alpha$ e quindi $\alpha \in V_{\alpha+1}$, ma $\alpha \notin V_\alpha$.

Per tutti i numeri naturali n, m si ha che $n, m \in V_{k+1}$ dove $k = \max\{n, m\}$. Allora $\{n\}, \{n, m\} \subseteq V_{k+1}$, quindi $\{n\}, \{n, m\} \in V_{k+2}$, e perciò la coppia ordinata di Kuratowski $(n, m) = \{\{n\}, \{n, m\}\} \in V_{k+3}$ in quanto sottoinsieme di V_{k+2}. Dunque il prodotto cartesiano $\omega \times \omega \subseteq \bigcup_{k\in\omega} V_k = V_\omega$. Adesso osserviamo che ogni funzione $f : \omega \to \omega$ è un sottoinsieme di $\omega \times \omega$, quindi $f \in V_{\omega+1}$ in quanto $f \subseteq \omega \times \omega \subseteq V_\omega$. Possiamo allora concludere che l'insieme di funzioni $\mathrm{Fun}(\omega, \omega) \in V_{\omega+2}$, in quanto sottoinsieme di $V_{\omega+1}$.

Per vedere che $\omega + 2$ è il più piccolo livello della gerarchia di von Neumann con quella proprietà, supponiamo per assurdo che $\mathrm{Fun}(\omega, \omega) \in V_{\omega+1}$, cioè che $\mathrm{Fun}(\omega, \omega) \subseteq V_\omega$. In particolare, se $1_\omega : \omega \to \omega$ è la funzione identità su ω, allora $1_\omega \in V_\omega$, e quindi dovrebbe esistere $k < \omega$ tale che $1_\omega \in V_k$. Questo non è possibile perché allora avremmo che $k \in \{k\} \in \{\{k\}\} = (k, k) \in 1_\omega \in V_k$, e per la transitività di V_k seguirebbe che $k \in V_k$, assurdo.

(2). Supponiamo prima che $\mathrm{cof}(\alpha) > \aleph_0$. Osserviamo che necessariamente α è un ordinale limite, altrimenti la sua cofinalità sarebbe 1. Per ogni $a \in A$ prendiamo un livello $\alpha_a < \alpha$ tale che $a \in V_{\alpha_a}$. L'insieme $\{\alpha_a \mid a \in A\}$ è al più numerabile e quindi, per l'ipotesi, è limitato in α, cioè esiste $\beta < \alpha$ tale che $\alpha_a \leq \beta$ per ogni $a \in A$. Ma allora $a \in V_{\alpha_a} \subseteq V_\beta$ per ogni $a \in A$, cioè $A \subseteq V_\beta$, e quindi $A \in V_{\beta+1} \subseteq V_\alpha$.

Viceversa supponiamo che $\mathrm{cof}(\alpha) \leq \aleph_0$. Se $\alpha = \gamma + 1$ è un successore, consideriamo l'insieme $A = \{\gamma\}$. Chiaramente $A \subseteq V_\alpha$ perchè $\gamma \in V_{\gamma+1} = V_\alpha$, ma $A \notin V_\alpha = V_{\gamma+1}$, altrimenti si avrebbe che $A \subseteq V_\gamma$, e quindi $\gamma \in V_\gamma$, assurdo.

Se $\mathrm{cof}(\alpha) = \aleph_0$, prendiamo un insieme numerabile $A \subseteq \alpha$ illimitato, cioè tale che $\bigcup_{\gamma\in A} \gamma = \alpha$. Allora $A \notin V_\alpha$. Infatti, se fosse $A \in V_\alpha$, allora esisterebbe $\beta < \alpha$ con $A \in V_\beta$ (visto che $\mathrm{cof}(\alpha) = \aleph_0$, l'ordinale α è necessariamente limite). Poiché A è illimitato possiamo prendere $\gamma \in A$ con $\gamma > \beta$; allora avremmo che $\beta \in \gamma \in A \in V_\beta$ e quindi, per transitività, $\beta \in V_\beta$, assurdo.

(3). I cardinali limite forte κ che soddisfano la proprietà considerata sono tutti e soli quelli con $\mathrm{cof}(\kappa) > \aleph_0$. Per mostrarlo, ricordiamo anzitutto che, come visto a lezione, la famiglia dei sottoinsiemi numerabili di un qualunque cardinale κ ha cardinalità $\kappa^{\aleph_0}$.

Se $\mathrm{cof}(\kappa) = \aleph_0$, allora $\kappa^{\aleph_0} = \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)} > \kappa$. Supponiamo ora che $\mathrm{cof}(\kappa) > \aleph_0$. In questo caso, ogni funzione $f : \aleph_0 \to \kappa$ è limitata, e quindi $\mathrm{Fun}(\aleph_0, \kappa) = \bigcup_{\gamma<\kappa} \mathrm{Fun}(\aleph_0, \gamma)$. Abbiamo allora le seguenti disuguaglianze:

$$\kappa \leq \kappa^{\aleph_0} = |\mathrm{Fun}(\aleph_0, \kappa)| = |\bigcup_{\gamma<\kappa} \mathrm{Fun}(\aleph_0, \gamma)| \leq \sum_{\gamma<\kappa} |\gamma|^{\aleph_0} = \max\{\sup_{\mu<\kappa} \mu^{\aleph_0}; \kappa\} = \kappa.$$

Sopra abbiamo usato l'ipotesi di κ limite forte per avere che $\mu^{\aleph_0} < \kappa$ per ogni $\mu < \kappa$, e quindi per avere $\sup_{\mu<\kappa} \mu^{\aleph_0} = \kappa$.