

Come scrivere(i) una tesi di matematica

Indicazioni su organizzazione del lavoro e del testo,
stile, forma matematica e formattazione
(20/11/2023)

Michele D'Adderio

ATTENZIONE:

Queste indicazioni sono perentorie per chi fa una tesi con l'autore di questo testo!

Indice

Introduzione	4
Come usare questo documento	5
Altre risorse utili	6
1 Premesse generali	7
1.1 Cos'è una tesi di matematica?	7
1.2 Come si “fa” una tesi di matematica?	7
1.3 Il ruolo del relatore	8
1.4 Il ruolo dello studente	8
2 Organizzazione del lavoro	9
2.1 Tempistiche	9
2.2 Come procedere nella scrittura	10
3 Organizzazione del testo	12
3.1 Impostazione generale	12
3.2 Scrivere per il “lettore ideale”	13
3.3 La narrativa	13
4 Stile	15
4.1 Ovunque nella tesi	15
4.2 Nell'introduzione	16
4.3 Nel testo	16
4.4 Nelle definizioni e negli enunciati	17
4.5 Nelle dimostrazioni	18
5 Forma matematica	19
5.1 Citazioni e referenze	19
5.2 Notazioni e definizioni	20
5.3 Dimostrazioni	20
5.4 Esempi	21

6	Formattazione	22
6.1	Preambolo	22
6.2	Margini	23
6.3	Divisione generale	23
6.4	Introduzione e capitoli non numerati	23
6.5	Indice	23
6.6	Indentazione	24
6.7	Punteggiatura	24
6.8	Simboli matematici nel testo	24
6.9	Uso dell'italico e del grassetto	25
6.10	Ambienti matematici	25
6.11	Numerazione e citazione di ambienti	28
6.12	Numerazione e citazione di equazioni	30
6.13	Bibliografia e citazioni di referenze	31
6.14	Equazioni lunghe e spiegazioni di passaggi	31
6.15	Figure	33

Introduzione

Good advice is always certain to be ignored, but that's no reason not to give it.

Agatha Christie

Il presente testo è legato a un *template*¹.

Le *indicazioni*² a cui fa riferimento il sottotitolo di questo documento sono rivolte a uno studente che si avvicina per la prima volta a scrivere una tesi in matematica (com'è tipicamente il caso di uno studente all'ultimo anno di laurea triennale), ma possono essere utili anche a chi lo fa per la seconda (o terza) volta (com'è tipicamente il caso di uno studente di laurea specialistica), visto che, com'è ben noto, non si dà mai abbastanza feedback su certe cose.

Le chiamo *indicazioni* e non *suggerimenti* perché d'ora in avanti pretenderò che i miei tesisti le seguano alla lettera.

Sebbene ad occhi esperti è evidente che quasi ogni affermazione che faccio è opinabile, chiunque abbia dato una tesi a uno studente sa che la creatività delle giovani menti matematiche, se lasciata al libero arbitrio, può generare mostri... Ritengo quindi che una rigida imposizione, per una volta, in un contesto così innocuo, possa portare un beneficio formativo superiore al disagio (anche questo in fondo formativo) che si possa provare nel conformarsi a una o più prescrizioni detestate.

Del resto rimane intatta la libertà di sottrarsi all'eventuale supplizio cercandosi un altro relatore di tesi³.

¹https://people.dm.unipi.it/dadderio/template_tesi.zip

²Chiunque abbia dei suggerimenti riguardo a questo documento, di qualunque tipo, è invitato a scrivermeli via michele.dadderio@unipi.it. Garantisco lettura ma non risposta.

³Ringrazio il collega Davide Lombardo per aver suggerito correzioni e migliorie a una prima versione di questo testo. Ovviamente eventuali errori ancora presenti nel testo sono da attribuirsi esclusivamente a lui.

Come usare questo documento

The road to wisdom? Well, it's plain
And simple to express:
Err
and err
and err again,
but less
and less
and less.

Piet Hein

Il presente documento dovrebbe essere letto integralmente dallo studente anche prima di intraprendere il lungo percorso che inizia con un primo incontro col futuro relatore, e termina con la redazione della versione finale della tesi di matematica.

Inoltre, alla fine della redazione di ogni capitolo, è bene rileggere il presente documento, e successivamente rileggere ciò che si è scritto, per verificare che tutte le indicazioni siano state seguite.

Più in generale, prima di sottomettere qualunque testo al proprio relatore, è bene rileggere il presente documento, e successivamente rileggere ciò che si è scritto, per verificare che tutte le indicazioni siano state seguite.

Altre risorse utili

The greatest part of writer's time
is spent in reading in order to write:
a man will turn over half library
to make one book.

Samuel Johnson

Ovviamente sono tanti quelli che hanno scritto consigli e suggerimenti per scrivere una tesi, ma più in generale un qualsiasi testo di matematica. Qui ci limitiamo a indicare solo alcune fonti.

Innanzitutto, il collega Davide Lombardo ha scritto un breve documento <https://people.dm.unipi.it/lombardo/files/Style.pdf> con suggerimenti di stile (ovviamente alcuni li riconoscerete...).

Terence Tao ha scritto tanto a riguardo sul suo blog <https://terrytao.wordpress.com/advice-on-writing-papers/>: questa pagina contiene anche referenze a tante altre risorse utilissime, che non ripeto qui.

Più in generale, Terence Tao ha scritto i suoi consigli sulla carriera accademica a tutti i livelli <https://terrytao.wordpress.com/career-advice/>: ovviamente vale la pena leggere anche queste pagine del suo blog.

Per l'*inglese matematico*, potete trovare alcuni suggerimenti di James Milne <https://www.jmilne.org/math/words.html>. Una versione più sistematica, con anche indicazioni grammaticali generali, l'ha scritta Douglas West <https://dwest.web.illinois.edu/grammar.html>.

Tra gli esempi di testi di matematica scritti in maniera magistrale, con uno stile e una narrativa eccellenti anche per una tesi di matematica, suggerisco [Art91, EG21] :

- Artin, *Algebra*, Prentice Hall, 1991
- Egecioğlu, Garsia, *Lessons in Enumerative Combinatorics*, Springer, 2021.

Capitolo 1

Premesse generali

Triste è quel discepolo
che non avanza il suo maestro.

Leonardo da Vinci

1.1 Cos'è una tesi di matematica?

Una *tesi* (triennale o magistrale) *di matematica* è un testo scritto che spiega della matematica a un laureato (triennale o magistrale) in matematica. Una tesi ha dunque una *forma* (è un “testo scritto”), una *sostanza* (“della matematica”), e una finalità comunicativa (“spiega” a un “laureato”), di fatto inestricabili: è evidente che una tesi senza un contenuto rilevante e corretto di matematica, non è una tesi di matematica; è forse meno ovvio, ma altrettanto ineluttabile, il fatto che un testo contenente affermazioni matematiche (eventualmente anche corrette), non è una tesi se non rispetta certi criteri di forma. In particolare non è una tesi un testo scritto da cui è troppo faticoso estrarre il contenuto matematico. Essendo rivolta a un (ipotetico) “laureato” (triennale o magistrale) in matematica, bisogna quindi bilanciare il contenuto matematico che si assume noto al (potenziale) lettore, e quello che si vuole appunto comunicare: sia nella struttura globale (organizzazione di capitoli, sezioni, etc.), sia in quella locale (dimostrazioni, esempi, etc.), trovare un buon equilibrio in questo senso, nello spazio consentito (c'è ovviamente un limite alla lunghezza del testo), è forse uno dei compiti più difficili per chi scrive una tesi di matematica.

1.2 Come si “fa” una tesi di matematica?

Per fare una tesi di matematica bisogna scegliere un argomento (tipicamente suggerito dal relatore), raccogliere informazioni sull'argomento (ossia studiare la letteratura rilevante), ed infine processare le informazioni al fine di elaborare un testo. Non è necessario, ma può succedere che la tesi abbia un contenuto matematico originale (come

un nuovo teorema). Quello che però dovrebbe sempre esserci di originale è la trattazione degli argomenti: sebbene tutti i risultati appaiano già in letteratura in qualche forma, il modo di organizzarli, spiegarli, la scelta della notazione, degli esempi, delle dimostrazioni, l'aggiunta o riscrittura di dettagli nelle dimostrazioni o negli esempi, la messa in relazione di diversi risultati in letteratura, sono tutte scelte che chi scrive la tesi deve fare, e che danno al testo un *punto di vista* su quella (piccola) parte di matematica.

1.3 Il ruolo del relatore

Il ruolo del relatore nella redazione di una tesi di matematica è duplice: da una parte *consiglia* lo studente, dando eventuali suggerimenti sulla scelta dell'argomento di tesi, la letteratura da consultare, l'organizzazione e la forma del testo (e della presentazione orale), aiutandolo eventualmente nella comprensione del contenuto matematico e delle sue relazioni interne; dall'altra *valuta* il lavoro svolto, decidendo se si è raggiunto un livello sufficiente per poter passare alla discussione della tesi, o se ci sono ancora troppe lacune (di forma o di sostanza), che rendono il testo impresentabile a una commissione di laurea.

È forse utile specificare qui anche quale non sia il ruolo del relatore. Il relatore non è un “correttore di bozze”: un testo con troppi errori di grammatica, di battitura e più in generale di sviste nel typesetting è ovviamente inammissibile, ma sta allo studente rimuoverli e sottoporre al relatore un testo privo di queste inesattezze. Il relatore non è nemmeno tenuto a spiegare passo passo, in ogni dettaglio, una dimostrazione, o un esempio: sta allo studente processare le informazioni trovate in letteratura, e produrre un testo matematicamente corretto, ferma restando ovviamente la possibilità di chiedere consigli e suggerimenti al relatore. Detto più brutalmente, il relatore non è tenuto a “scrivere di fatto” anche solo una parte della tesi: sta allo studente elaborare e scrivere il contenuto matematico in modo appropriato, chiedendo eventuali consigli al relatore e seguendoli.

1.4 Il ruolo dello studente

Il ruolo dello studente è evidentemente quello di “fare” la tesi, nel senso della Sezione 1.2. In particolare è lo studente che deve concordare l'argomento di tesi col relatore, cercare e studiare le referenze rilevanti, processare le informazioni, produrre un elaborato soddisfacente, quindi corretto e completo nella forma e nella sostanza, e sottoporlo al relatore per approvazione. È responsabilità dello studente fare tutte queste cose, concordandone col relatore i tempi¹ e i modi, e conformandosi ai regolamenti di dipartimento e di ateneo, rispettandone le procedure e le scadenze.

¹L'autore di questo testo ha idee molto stringenti a riguardo: vedi <https://people.dm.unipi.it/dadderio/tesisti>.

Capitolo 2

Organizzazione del lavoro

All we have to decide is what to do
with the time that is given to us.

J. R. R. Tolkien

2.1 Tempistiche

Forse non è inutile dire che prima si comincia e meglio è. Come è ben noto, la fisiologia del cervello impedisce a chiunque di assorbire e digerire grandi quantità di concetti nuovi e profondi in poco tempo. Studiare e capire il contenuto matematico di una tesi richiede uno sforzo allo studente che non può essere compresso in pochi giorni. È quindi essenziale che si inizi a studiare per tempo, mesi prima di una potenziale data di discussione.

Importante

Studiare regolarmente, ogni settimana, prevedendo un tempo minimo di studio settimanale (meglio ancora quotidiano) per la tesi.

La redazione della tesi richiede molto tempo. Anche solo scrivere materialmente in \LaTeX prende molto tempo (una singola pagina di matematica può facilmente richiedere 30-40 minuti).

Importante

Scrivere (in \LaTeX) regolarmente, ogni settimana, prevedendo un tempo minimo di scrittura settimanale (meglio ancora quotidiano) per la tesi.

Passare tanti minuti consecutivi a scrivere in \LaTeX è estenuante. È importante prevedere sessioni di scrittura brevi (non più di un'ora), intervallate da pause consistenti

(almeno 30 minuti). In ogni caso è meglio evitare di scrivere per più di 4 ore in una signola giornata.

A questo punto, con le stime date qui sopra, è facile capire perché la redazione di una tesi di 40 pagine non può prendere meno di una settimana lavorativa, anche solo per essere scritta, senza contare il tempo di riflessione su organizzazione e dettagli del contenuto matematico. Realisticamente, due settimane sono un tempo minimo abbastanza ragionevole per redigere in \LaTeX una bozza completa di una tesi di 40 pagine. Questo ovviamente escludendo la compresenza di altri impegni, come corsi da seguire, esami da preparare e/o eventuali altre incombenze lavorative.

2.2 Come procedere nella scrittura

Importante

L'introduzione va scritta sempre e solo alla fine, dopo aver scritto tutto il resto della tesi.

Infatti, sebbene troverà posto all'inizio del testo, l'introduzione si scrive sempre col senno del poi: essendo in particolare una brevissima sinossi del contenuto del testo, redigerla prima di aver finito di scrivere il resto porterebbe a evitabili continue correzioni.

Chiaramente un po' di pianificazione non guasta mai:

Utile

Prima di cominciare la redazione, concepire un piano di massima dell'organizzazione del testo, almeno a livello di capitoli, meglio ancora a livello di sezioni.

Una volta che si ha un'idea iniziale generale di come saranno organizzati i capitoli (ovviamente questa idea iniziale potrà essere modificata in corso d'opera), si passa alla redazione vera e propria, ossia alla scrittura in \LaTeX .

Importante

Cominciare la redazione dai capitoli che contengono i risultati centrali della tesi.

Questo per un motivo semplice: la lunghezza della tesi ha un limite superiore fissato, e inevitabilmente prima o poi bisognerà decidere cosa includere nel testo e cosa lasciare fuori. Chiaramente i risultati centrali della tesi non possono essere lasciati fuori, quindi quelli dovranno apparire in ogni caso. Successivamente, una volta abbozzati quelli, diventerà più chiaro cosa è necessario scrivere nei capitoli precedenti, e a quel punto ci si troverà in una posizione migliore per fare le inesorabili scelte.

Importante

Nella prima stesura (di un capitolo, ma più in generale della tesi), scrivere solo definizioni, esempi e risultati principali, omettendo lemmi e dimostrazioni.

In questo modo si produrrà una prima bozza contenente quello che non può essere omesso o decurtato in nessuno scenario. Quello che si può decidere a posteriori se omettere per mancanza di spazio può essere una dimostrazione, ad esempio perché troppo lunga, troppo tecnica o che poggia su una teoria che esula dallo scopo principale della tesi, o un'applicazione dei risultati principali, o quanto meno parte dei dettagli di queste cose. Di certo non si possono omettere definizioni, esempi e enunciati di risultati principali.

Inoltre, in questa fase iniziale, si avrà un quadro migliore del contenuto della tesi, e si potrà eventualmente ripensare all'organizzazione generale dei capitoli: modifiche di questo tipo, a questo stadio della redazione, non hanno grandi costi di adeguamento.

Nello stadio successivo ovviamente andranno inserite le dimostrazioni e gli eventuali lemmi necessari. Naturalmente durante questa fase ci potranno essere ripensamenti sui dettagli già scritti, e più in generale sull'organizzazione del testo.

Importante

Dopo la redazione dettagliata di ogni capitolo, rileggere dall'inizio il testo, per controllare la coerenza e la scorrevolezza della trattazione.

In particolare, alla fine della redazione della tesi, è necessario rileggere dall'inizio tutto il testo.

Utile

Alla fine della redazione della tesi, prima di rileggere il tutto, è meglio far passare almeno due o tre giorni dall'ultimo giorno in cui si è scritto qualcosa.

Infatti dimenticare un po' il dettaglio di ciò che si è scritto aiuta a individuare errori e più in generale problemi nella redazione.

Capitolo 3

Organizzazione del testo

A goal without a plan is just a wish.

Antoine de Saint-Exupéry

3.1 Impostazione generale

Ogni trattazione matematica dovrebbe cominciare con l'introduzione degli oggetti matematici rilevanti (quindi le definizioni necessarie, corredate di esempi), immediatamente seguiti dalla formulazione dei problemi che si vogliono affrontare. Questi ultimi inoltre dovrebbero essere motivati, dandone un inquadramento nella letteratura scientifica, evidenziando eventuali risultati noti correlati e rilevanti, e indicando eventuali applicazioni e collegamenti con altre parti della matematica (ed eventualmente più in generale della scienza).

Solo successivamente si affronteranno i dettagli tecnici, come le eventuali dimostrazioni. Per questi, è solitamente necessario richiamare (almeno per fissarne le notazioni) nozioni preliminari che si assumeranno note nel resto della trattazione.

La suddivisione dei capitoli deve rispecchiare dunque queste linee guida generali:

- Solitamente è necessario un capitolo di nozioni preliminari dedicato, che può essere il primo (dopo l'introduzione ovviamente), o l'ultimo, sotto forma di appendice.
- Un primo capitolo (dopo l'introduzione e l'eventuale capitolo di preliminari) dovrà contenere le prime definizioni, con i primi esempi. Potenzialmente per queste prime definizioni può essere necessario più di un capitolo, specie se gli oggetti vengono naturalmente da teorie diverse (ad esempio dalla combinatoria e dalla topologia algebrica).

- Successivamente ci sarà un capitolo contenente la formulazione dei problemi che si affronteranno nel resto della tesi, con eventuali motivazioni matematiche. In questo capitolo potranno essere preannunciati i risultati principali della tesi.
- Nei capitoli successivi, dovranno essere introdotti e spiegati gli strumenti matematici necessari alle dimostrazioni dei risultati principali.
- Successivamente ci saranno i capitoli contenenti i dettagli tecnici dei risultati principali.
- Eventualmente, potranno esserci dei capitoli che illustrano applicazioni dei risultati stabiliti. Questi ultimi capitoli possono contenere anche indicazioni ulteriori sulla letteratura rilevante.

3.2 Scrivere per il “lettore ideale”

Il “lettore ideale” di una tesi di matematica è un laureato (triennale o magistrale) in matematica. È dunque a lui che l’autore di una tesi deve rivolgersi. Ogni volta che si dà una definizione, un esempio, una dimostrazione, bisogna tenere a mente che questa è destinata a un laureato in matematica, quindi il livello di chiarezza, di dettaglio nelle spiegazioni, di profondità delle motivazioni, deve essere commisurato a lui.

In particolare il lettore non è un esperto in materia, e dunque non è tipicamente in grado di cogliere istantaneamente il senso di un argomento tecnico o di un riferimento a matematica avanzata. Questo è particolarmente importante nel decidere quanti dettagli di esempi e dimostrazioni includere, nonché nel decidere cosa assumere come noto.

Importante

Uno dei valori aggiunti di una tesi di matematica è quello di rendere più accessibili parti della letteratura spesso comprensibili solo ad esperti.

Ad esempio, capita sempre, nello studio delle referenze per la tesi, di trovare dei punti (negli esempi, o in alcuni passaggi dimostrativi) meno chiari, che si fa più fatica a capire: questi ostacoli richiedono spesso diverse ore di lavoro per essere superati, e nei casi più difficili richiedono anche l’aiuto del relatore. Ebbene, le difficoltà riscontrate dallo studente sono quelle che molto probabilmente troverebbe qualunque laureato in matematica nella stessa situazione. Sono dunque questi i punti su cui vale la pena soffermarsi anche nella redazione della tesi, aggiungendo dettagli, eventualmente uno o più lemmi, calcoli, esempi.

3.3 La narrativa

Ogni testo matematico ha una sua *narrativa*: anche parlando di matematica si sta descrivendo in qualche modo una “storia” che porta il lettore a capire un “pezzo” di

matematica. Dunque è importante che l'autore della tesi pianifichi il discorso, tessendo una "trama" che porta il lettore a incontrare i vari "protagonisti", ossia gli oggetti matematici in questione, i problemi rilevanti, i risultati esposti, e le possibili ramificazioni della storia, ossia eventuali applicazioni.

Per consigli su queste importanti scelte narrative è sicuramente molto utile confrontarsi col relatore, che può avere una visione più ampia e profonda della materia, e può consigliare strategie comunicative più efficaci.

Capitolo 4

Stile

So the writer who breeds
more words than he needs,
is making a chore
for the reader who reads.

Dr. Seuss

The most valuable of all talents is that of
never using two words when one will do.

Thomas Jefferson

4.1 Ovunque nella tesi

Una tesi di matematica è un testo scientifico, e come tale è per natura di non facile comprensione. È bene quindi evitare uno stile di scrittura troppo articolato, che rende faticosa la lettura, e di conseguenza la comprensione del testo.

Importante

Si evitino frasi troppo lunghe e/o troppo elaborate.

È sempre meglio spezzare una frase troppo lunga in due o più frasi semplici, stando ovviamente attenti a non creare cacofoniche ripetizioni.

Importante

Mai usare eccessiva enfasi.

Una tesi di matematica rimane un testo accademico, professionale. È quindi fuori luogo usare espressioni troppo enfatiche nel descriverne il contenuto scientifico. Si stia quindi molto attenti a non abusare di parole come “importante”, “fondamentale”, “centrale”, “notevole”, “profondo”. Da evitare espressioni come “bello/brutto”, “difficile/facile”, “elegante”, “astuto”, “straordinario” e simili.

4.2 Nell'introduzione

Lo scopo dell'introduzione di una tesi di matematica, oltre a dare una brevissima sinossi del contenuto del testo, è inquadrarne il contenuto matematico nel contesto della letteratura scientifica attuale, eventualmente evidenziandone le caratteristiche di originalità (nel contenuto e/o nella presentazione).

Importante

Dare credito a tutti, citando le fonti.

Quando si menzionano risultati particolari, si deve sempre citarne gli autori, dando una referenza precisa (a un libro o a un articolo, evitare di citare note di corsi, o tesi).

Importante

Evidenziare gli eventuali elementi di originalità del testo.

Gli elementi di originalità possono essere risultati originali, argomenti originali (magari anche solo delle semplificazioni sostanziali di argomenti in letteratura), o anche semplicemente una presentazione di certi argomenti che segue un percorso originale. Tutti questi elementi vanno citati e spiegati con correttezza nell'introduzione, attribuendo al contempo i crediti dovuti agli autori in letteratura.

4.3 Nel testo

Importante

Mai cominciare una frase con un simbolo matematico.

Questo vale anche all'interno dei periodi: ad esempio **non** va bene

Dato $n \in \mathbb{N}$, a_n è un intero...

ma ad esempio va bene

Dato $n \in \mathbb{N}$, sia a_n un intero...

oppure

Dato $n \in \mathbb{N}$, denotiamo con a_n un intero...

Importante

Mai usare abbreviazioni, in particolare mai usare i simboli come \forall e \exists .

I simboli \forall , \exists o le abbreviazioni come WLOG, DIM., RHS, LHS, TFAE, etc... si usano alla lavagna (o nelle slides), durante lezioni e seminari. Ma all'interno di una tesi vanno assolutamente evitati, e rimpiazzati dall'equivalente in parole, anche a costo di cambiare leggermente il testo.

Importante

All'inizio di ogni capitolo/sezione, dare brevi indicazioni sul contenuto che si sta per sviluppare, ed eventualmente su come si collega con le altre parti (capitoli/sezioni) del testo.

Tramite queste brevi indicazioni si devono evidenziare i "fili" che tengono insieme la "trama" della storia matematica che si sta raccontando. Non bisogna mai assumere che un lettore che prende in mano il testo sia ciecamente disposto a leggerne linearmente l'intero contenuto. Al contrario, bisogna guidare il lettore, motivando ciò che sta per essere spiegato, e sottolineando i collegamenti con ciò che si è già letto o che si leggerà più avanti nel testo.

Importante

Intramezzare il contenuto matematico con frasi didascaliche.

Ad esempio frasi come "Vediamo adesso un esempio...", "Il seguente teorema è il risultato centrale di questa sezione...", "Prima di dimostrare questo risultato abbiamo bisogno del seguente lemma", "Prima di enunciare il risultato principale, abbiamo bisogno di alcune definizioni", etc... sono essenziali per rendere scorrevole la lettura di un testo matematico.

4.4 Nelle definizioni e negli enunciati

Importante

Definizioni ed enunciati devono essere precisi e il più possibile autocontenuti.

Ad esempio una definizione del tipo

Diciamo che G è *abeliano* se...

non va bene, anche se il simbolo G è apparso prima nel testo come gruppo; meglio

Diciamo che un gruppo G è *abeliano* se...

o anche

Un gruppo G si dice *abeliano* se...

Similmente

Teorema. L'ordine di σ è il minimo comune multiplo delle lunghezze dei suoi cicli disgiunti.

non va bene, anche se prima nel testo σ è apparso come una permutazione; meglio

Teorema. L'ordine di una permutazione σ è il minimo comune multiplo delle lunghezze dei suoi cicli disgiunti.

o ancora meglio

Teorema. Dati $n \in \mathbb{N}$ positivo e $\sigma \in S_n$, l'ordine di σ in S_n è il minimo comune multiplo delle lunghezze dei suoi cicli disgiunti.

4.5 Nelle dimostrazioni

Importante

Evidenziare i passaggi logici dell'argomento dimostrativo, anche usando l'indentazione dei paragrafi.

Se ad esempio bisogna dimostrare due implicazioni per dimostrare l'equivalenza di due affermazioni, è bene annunciare esplicitamente che si sta per dimostrare un'implicazione, e per dimostrare la seconda cominciare un nuovo paragrafo usando l'indentazione. Similmente se ci sono da dimostrare diverse implicazioni, o diverse affermazioni.

Se si usa l'induzione, bisogna annunciarlo, poi fare il caso base in un primo paragrafo indentato, e poi fare il passo induttivo in un nuovo paragrafo indentato.

Se si usa un argomento per assurdo, bisogna annunciarlo, e sottolineare poi l'assurdità trovata.

Capitolo 5

Forma matematica

Mathematics is not about numbers,
equations, computations, or algorithms:
it is about understanding.

William P. Thurston

5.1 Citazioni e referenze

Importante

Tutte le affermazioni matematiche contenute nella tesi devono essere giustificate, con una dimostrazione o con una referenza precisa.

Se un'affermazione è dimostrata nel testo, ovviamente va bene. Ma se si vuole usare un'affermazione di cui non si dà la dimostrazione nel testo, bisogna sempre dare una referenza, che deve apparire prima dell'enunciato e deve essere sufficientemente precisa. Ad esempio se l'affermazione appare sostanzialmente come un teorema/corollario/lemma in un articolo/libro, bisogna indicare con precisione l'articolo/libro e il teorema/corollario/lemma con la eventuale numerazione corrispondente. Se nella referenza viene usata una notazione leggermente diversa, o un'affermazione un po' più generale, questo si può e si deve dire, ovviamente a parole, quando si fa la citazione.

A volte l'affermazione che si vuole usare non è identica a quella che compare nella referenza: in questo caso si deve indicare almeno la sezione/capitolo (sezioni/capitoli) in cui si possono trovare le dimostrazioni.

In particolare una cosa da non fare è citare per un'affermazione precisa un libro di 600 pagine: senza ulteriori coordinate, una tale referenza diventerebbe una caccia al tesoro...

Si pone a volte la questione se, all'interno del testo, si deve citare un'equazione, o il teorema/corollario/lemma che afferma sostanzialmente quell'equazione. Ad esempio

il Teorema 6.10.1 sostanzialmente afferma l'equazione

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

(che non appare numerata, ma ovviamente si può numerare). In questo caso c'è una certa libertà. Ma bisogna sempre ricordarsi che il risultato corrispondente in genere ha delle ipotesi sui simboli che appaiono nell'equazione (ad esempio p è un primo, cosa che nell'equazione non è scritta), o comunque può contenere anche altre affermazioni. Bisogna quindi fare attenzione a cosa si sta veramente usando.

Può darsi che si scriva nella tesi un capitolo che contiene molti risultati preliminari: spesso questo si fa per fissare le notazioni e per potervi fare riferimento più avanti nel testo. Può dunque succedere che intere sezioni siano prive di dimostrazioni: in questo caso è consigliabile dare delle referenze generali all'inizio di ogni sezione (o del capitolo): ad esempio si può dire “Per le dimostrazioni dei risultati di questa sezione ci si riferisce al libro... Capitoli 3 e 4.” In questo modo non sarà più necessario dare una referenza ad ogni affermazione. Ovviamente questo si può fare quando si sta parlando di teorie molto standard, che ad esempio si possono facilmente trovare in un corso di triennale o magistrale. Se invece si cita una teoria più avanzata (o comunque meno comunemente nota), vale la pena dare referenze più precise e dettagliate.

5.2 Notazioni e definizioni

Importante

Notazioni e definizioni devono essere date prima di essere usate.

In particolare non si può assumere la conoscenza di una notazione, anche se fosse una notazione usata sistematicamente in un corso.

I concetti di base che si assumono noti al lettore devono essere quanto meno annunciati in una frase (posizionata opportunamente nel testo) del tipo “In questa tesi/capitolo/sezione assumiamo la familiarità del lettore con l'algebra lineare e le nozioni di base di teoria dei gruppi”, eventualmente con l'indicazione di una referenza generale.

Importante

Ogni definizione deve essere immediatamente seguita da esempi.

5.3 Dimostrazioni

Le dimostrazioni devono essere ovviamente corrette, precise e dettagliate.

Importante

Quando si usa all'interno di una dimostrazione un'affermazione, una definizione o un'equazione che appare altrove nel testo, si deve usare una citazione numerata.

Si deve evitare di dare referenze vaghe come in “un teorema/lemma visto prima”, o “come visto nella sezione/capitolo precedente”. A volte, se si sta per usare una definizione che è stata data molte pagine/sezioni prima, e non è stata usata più di recente, è meglio ricordarla per esteso invece che fare una citazione numerata.

5.4 Esempi

Gli esempi sono essenziali in qualunque testo di matematica (più in generale in qualunque tentativo di comunicare matematica).

Oltre a seguire immediatamente ogni definizione, è utile usare esempi anche per spiegare affermazioni di teoremi/lemmi/proposizioni/osservazioni.

Utile

Usare un “running example” per spiegare una serie di nozioni intorno a uno stesso oggetto/concetto matematico o a uno stesso argomento dimostrativo.

Ad esempio per spiegare varie nozioni legate alle permutazioni (come inversioni, discese, cicli disgiunti, oneline notation, etc.) è bene usare una stessa permutazione di cui si evidenziano tutte le nozioni in questione. Oppure, in una dimostrazione algoritmica, mostrare con lo stesso esempio cosa fanno le diverse subroutines.

Importante

Gli esempi devono essere spiegati in modo limpido e dettagliato.

Nell'esempio il lettore cerca chiarimenti o conferme a quello che ha appena letto, dunque è essenziale che in questo non vi trovi errori, omissioni o possibili fraintendimenti.

Importante

Usare esempi semplici, ma non troppo semplici.

Ad esempio non è necessario usare matrici quadrate di taglia 42 per spiegare il prodotto di due matrici. Ma certamente matrici di taglia 1 non aiutano a capire cosa succede...

Capitolo 6

Formattazione

Quotation is a serviceable substitute for wit.

Oscar Wilde

In questo capitolo ci occupiamo di come si deve presentare una tesi nella sua formattazione. In particolare daremo diverse indicazioni tecniche di \LaTeX . Si assume in ogni caso un minimo di familiarità col \LaTeX , facilmente ottenibile da un breve colloquio con un collega più esperto (o da un po' di ricerche con Google). In realtà, sapendo compilare e modificare il template¹ collegato al presente documento, potrebbe bastare anche un po' di sperimentazione col suddetto (condita con un pizzico di intuizione).

6.1 Preambolo

Il *preambolo* è tutto quello che viene prima di `\begin{document}`.

Si suggerisce di usare la documentclass `\documentclass[11pt,leqno]{report}`. L'opzione `11pt` serve ad avere un font leggermente più grande (di default è `10pt`), mentre l'opzione `leqno` mette a sinistra la numerazione delle equazioni (che è molto meglio).

Subito dopo la documentclass, in genere si inseriscono i pacchetti che (eventualmente) si usano. Ad esempio

```
\usepackage[italian]{babel}
\usepackage[colorlinks,allcolors=blue]{hyperref}
\usepackage{amsthm}
```

sono alcuni dei pacchetti che si usano: il primo per impostare la lingua italiana (ovviamente il default è l'inglese, per il quale non serve nessun pacchetto), il secondo crea degli hyperlinks nel pdf, il terzo serve per gli ambienti matematici (che verranno discussi più avanti).

¹https://people.dm.unipi.it/dadderio/template_tesi.zip

Nel seguito verranno menzionati anche altri pacchetti. In generale quelli citati appaiono tutti nel template collegato a questo documento.

6.2 Margini

Con il package `\usepackage{vmargin}` si può usare il comando `\setmarginsrb{33mm}{30mm}{33mm}{40mm}{0mm}{10mm}{0mm}{10mm}` per settare i margini delle pagine della tesi: la documentclass “report” ha di default una pagina molto stretta.

6.3 Divisione generale

Oltre al frontespizio (su cui non c’è molto da dire), la tesi si divide in *capitoli*, e i capitoli si dividono in *sezioni*. Usando `\documentclass[11pt,leqno]{report}`, per questi si usano `\chapter` e `\section`.

L’uso delle sottosezioni in generale è da **evitarsi**. Se una sezione è troppo lunga, e nasce l’esigenza di suddividerla, o si considera di dividere la sezione in più sezioni, o al limite si può usare `\subsection*` (con l’asterisco) in modo da non intervenire sulla enumerazione di ambienti ed equazioni, che rimangono in questo modo legate alle sezioni.

Utile

Può essere utile creare dei files separati per ogni capitolo, e poi richiamarli tutti da un “main” file .tex, usando ad esempio il comando `\include{chapter_preliminari}` per includere il file `chapter_preliminari.tex`.

Usando files separati infatti si può facilmente escludere alcuni capitoli nella compilazione (semplicemente mettendo un % all’inizio della riga del comando `\include` corrispondente), velocizzando la redazione.

6.4 Introduzione e capitoli non numerati

Con il comando `\chapter*{Introduzione}` si produce un capitolo non numerato, intitolato “Introduzione”. Si usi questo per l’introduzione e per eventuali capitoli in appendice.

6.5 Indice

L’indice si crea automaticamente col comando `\tableofcontents`.

Per aggiungere nell’indice anche i capitoli non numerati si usa il comando `\addcontentsline{toc}{chapter}{Introduzione}` immediatamente dopo `\chapter*{Introduzione}`.

6.6 Indentazione

L'indentazione non è puramente un artificio estetico, ma ha una sua chiara funzione: sottolineare la separazione del testo in *paragrafi*.

L'indentazione va quindi usata, e va usata in modo corretto. I paragrafi sono utili in particolare nell'introduzione (che è un testo più discorsivo), e nelle dimostrazioni (ad esempio per distinguere le argomentazioni di due diverse implicazioni).

Importante

Subito dopo un'equazione o una figura, evitare l'indentazione, a meno che non sia effettivamente l'inizio di un nuovo paragrafo. In particolare mai usarla se l'equazione cade all'interno di una frase!

Utile

Per evitare l'indentazione che avviene in automatico in L^AT_EX, si può usare `\noindent` all'inizio della frase/paragrafo che non si vuole indentare.

6.7 Punteggiatura

Anche la punteggiatura non è un artificio estetico, ma è funzionale alla comprensione del testo scritto.

Importante

Non usare la virgola quando ci vuole un punto o un punto e virgola.

Le regole di punteggiatura restano in vigore anche in ambienti centrati.

Importante

Si devono usare virgole e punti anche alla fine di equazioni centrate.

6.8 Simboli matematici nel testo

Importante

All'interno del testo bisogna **sempre** mettere i simboli matematici tra i simboli di dollaro \$.

Si noti ad esempio la differenza tra le lettere “a” ed “n” scritte senza usare questi simboli, e le lettere “*a*” ed “*n*” scritte con $\$a\$$ e $\$n\$$. Anche i simboli di uguale e delle operazioni sono diversi: si noti la differenza tra “ $2+2=4$ ” e “ $2 + 2 = 4$ ” scritto

come $\$2+2=4\$$. Ovviamente i simboli $\$$ non sono necessari all'interno di ambienti di equazioni (discussi più avanti).

6.9 Uso dell'italico e del grassetto

Sia l'italico `\textit` (oppure `\emph`) che il grassetto `\textbf` sono usati per dare risalto al testo. Quindi vanno usati con molta parsimonia. In particolare il grassetto è chiaramente più forte dell'italico, quindi va usato anche meno. Difatti, il grassetto viene usato automaticamente nei nomi (e numeri) degli ambienti (tranne per le osservazioni) e nei titoli di capitoli e sezioni, quindi è bene che non compaia altrove, se non eccezionalmente.

Importante

Si usi l'italico nelle definizioni, per evidenziare le parole che si stanno definendo.

Ad esempio:

Dato un *gruppo* G diremo che è *abeliano* se per ogni coppia di elementi $g, h \in G$ si ha $gh = hg$.

Non si dovrebbe mai scrivere un'intera frase in italico, se non per indicare qualcosa di estremamente importante per il seguito. Ad esempio può valere la pena scrivere interamente in italico un avvertimento che da quel punto in poi nella tesi (o nel capitolo) si fa un'assunzione che non si vuole menzionare ripetutamente, o si cambia il significato di una parola (o di una notazione) in modo permanente.

Ad esempio:

Attenzione: per tutto il resto di questo capitolo assumeremo implicitamente che i gruppi che consideriamo siano finiti.

Oppure:

Attenzione: d'ora in poi con la parola "anello" indicheremo un anello commutativo con unità.

6.10 Ambienti matematici

Gli *ambienti matematici* vanno innanzitutto definiti nel preambolo (ossia prima di `\begin{document}`). Usando il pacchetto `\usepackage{amsthm}` si possono usare i due stili, `\theoremstyle{remark}` per le *osservazioni*, e `\theoremstyle{definition}` per tutto il resto, ossia *teoremi, corollari, proposizioni, lemmi, esempi, definizioni*, etc.

L'uso dello stile `\theoremstyle{plain}` è da **evitarsi** (perché usa l'italico di default, che è inutilmente pesante).

Ad esempio se nel preambolo compaiono (nell'ordine)

```
\usepackage{amsthm}

\theoremstyle{definition}
\newtheorem{theorem}{Teorema}[section]
\newtheorem{corollary}[theorem]{Corollario}
\newtheorem{lemma}[theorem]{Lemma}
\newtheorem{proposition}[theorem]{Proposizione}
\newtheorem{definition}[theorem]{Definizione}

\theoremstyle{remark}
\newtheorem{remark}[theorem]{Osservazione}
```

(nota che le occorrenze di `[section]` e `[theorem]` servono per la numerazione, che verrà discussa più avanti, di questi ambienti), allora abbiamo i seguenti esempi:

Esempio di `\begin{theorem}`:

Teorema 6.10.1 (Fermat). Per ogni primo p e per ogni intero a vale

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

(per indicare l'autore del teorema ho usato `\begin{theorem}[Fermat]`).

Esempio di `\begin{definition}`:

Definizione 6.10.2. Un intero positivo p si dice *primo* se $p \geq 2$ e p ha come divisori positivi solo 1 e p .

(si noti l'uso dell'italico per indicare il termine che stiamo definendo).

Esempio di `\begin{remark}`:

Osservazione 6.10.3. L'unico primo pari è 2.

(si noti la differenza di stile con gli altri ambienti).

Esempio di `\begin{example}`:

Esempio 6.10.4. Un esempio di primo p congruo a 1 modulo 4 è $p = 13$.

(si noti come la numerazione di questi ambienti sia progressiva).

Per le dimostrazioni si usa `\begin{proof}`, che nel pacchetto `\usepackage{amsthm}` è predefinito. Ad esempio

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n . Per $n = 0$ l'affermazione è ovvia.... □

Volendo si può modificare la dicitura: ad esempio

Dimostrazione del teorema di Fermat. Procediamo per induzione su $a \geq 0$. Per $a = 0$ l'affermazione è ovvia.... □

si ottiene con `\begin{proof}[Dimostrazione del teorema di Fermat]` (si noti che in ogni caso il quadratino in basso a destra a indicare la fine della dimostrazione appare automaticamente).

Per le equazioni gli ambienti più utili sono i seguenti: se non si vuole numerare l'equazione (ma comunque evidenziarla isolandola e centrandola) si usano `\[e \]`, se bisogna anche andare a capo con le equazioni si usa `\begin{align*}`; mentre se si vuole numerare l'equazione si usa `\begin{equation}`, e `\begin{align}` se bisogna anche andare a capo con le equazioni (così si numerano tutte le righe; se si vuole non numerare una riga bisogna usare `\notag` all'inizio della riga che non si vuole numerare). Esempio di `\[e \]`:

$$2 + 2 = 4$$

(si è usato `\[2+2=4\]`).

Esempio di `\begin{equation}`:

$$(6.10.1) \quad 2 + 2 = 4$$

(si è usato `\begin{equation} 2+2=4 \end{equation}`).

Esempio di `\begin{align*}`: per scrivere

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b) \cdot (a+b) \\
&= a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2 \\
(\text{usando } a^2 + b^2 \geq 0) &\geq 2ab
\end{aligned}$$

si usa

```

\begin{align*}
(a+b)^2 & \& = (a+b)\cdot (a+b) \\
& = a^2+a\cdot b+b\cdot a+b^2 \\
& = a^2+2ab+b^2 \\
(\text{usando } a^2+b^2 \geq 0) & \& \geq 2ab
\end{align*}

```

(si noti che con `\\` si va a capo, in una nuova riga, mentre l'allineamento avviene con il primo carattere a destra del simbolo `&`).

Esempio di `\begin{align}`: per scrivere

$$\begin{aligned}
(6.10.2) \quad & (a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) \\
& = a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2 \\
& = a^2 + 2ab + b^2 \\
(6.10.3) \quad & (\text{usando } a^2 + b^2 \geq 0) \geq 2ab
\end{aligned}$$

si usa

```

\begin{align*}
\notag (a+b)^2 & \& = (a+b)\cdot (a+b) \\
& = a^2+a\cdot b+b\cdot a+b^2 \\
\notag & \& = a^2+2ab+b^2 \\
(\text{usando } a^2+b^2 \geq 0) & \& \geq 2ab
\end{align*}

```

(si noti che le righe che iniziano con `\notag` non vengono numerate, mentre le altre sì).

6.11 Numerazione e citazione di ambienti

Una delle caratteristiche fondamentali di $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, che lo rende uno strumento insostituibile per scrivere matematica, è la gestione delle referenze di ambienti ed equazio-

ni. Questa avviene tramite *etichette* (*labels*): in questo modo, modificando il testo (spostando, inserendo o cancellando ambienti), la numerazione viene sempre data progressivamente in modo corretto, e il riferimento all'ambiente viene automaticamente aggiornato e resta sempre corretto.

Importante

La numerazione di tutti gli ambienti (tranne le equazioni e le figure) deve essere progressiva, e deve seguire le sezioni.

Con `\theoremstyle{\newtheorem{teorema}{Teorema}[section]}` si definisce come primo l'ambiente `teorema`: la presenza e la posizione di `[section]` assicura che la numerazione dei teoremi segue le sezioni. Invece inserendo `[theorem]` nella definizione di tutti gli ambienti successivi e nella posizione indicata, come in

```
\theoremstyle{\newtheorem{corollario}[theorem]{Corollario}}
```

garantisce che tutti gli ambienti numerati (escluse le equazioni e le figure, che vengono numerate indipendentemente dagli altri ambienti) siano numerati allo stesso modo, tutti progressivamente, come visto negli esempi della Sezione 6.10 sugli ambienti matematici. Ad esempio il Corollario 1.3.2 è il secondo ambiente numerato che appare nella terza sezione del primo capitolo.

Per citare/riferirsi al numero di un ambiente, ad esempio al Teorema 1.3.2, si mette innanzitutto un'etichetta subito dopo `\begin{teorema}`, ad esempio scrivendo `\label{thm:piccolo_fermat}` (qui `thm:piccolo_fermat` è semplicemente il nome dell'etichetta), e poi si richiama il numero corrispondente (automaticamente) con `\ref{thm:piccolo_fermat}`.

Ad esempio scrivendo `Teorema~\ref{thm:piccolo_fermat}` si cita il teorema di Fermat scritto sopra.

Utile

Il simbolo `~` per la “tilde”, usato al posto di uno spazio tra due parole/oggetti del testo, garantisce che \LaTeX non vada a capo tra le parole/oggetti che unisce. Va sempre usato quando si cita un ambiente: ad esempio scrivendo `Teorema~\ref{thm:piccolo_fermat}` garantisce che \LaTeX non vada a capo tra la parola “Teorema” e il numero “6.10.1”.

Importante

Quando si cita un ambiente numerato col suo numero **si usa sempre la maiuscola** (quindi sempre “Teorema 6.10.1” e mai “teorema 6.10.1”). Viceversa, quando si menziona senza numero (come in “il teorema precedente”, o “il corollario del Teorema 6.10.1”), **non si usa mai la maiuscola** (quindi sempre “il teorema precedente” e mai “il Teorema precedente”).

Dare un nome intelligente alle etichette è importante e utile: ad esempio si può usare `thm`, `cor`, `prop`, `lem`, `rmk`, `ex`, `eq`,... per etichettare un teorema, corollario, proposizione, lemma, osservazione, esempio, equazione,... rispettivamente, seguita dai due punti, seguiti a loro volta da parole (separate dall'underscore `_`) che individuano in maniera chiara e precisa a cosa si riferiscono (ad esempio `thm:piccolo_fermat` o `eq:due_piu_due`). In particolare **non** fare riferimento alla numerazione (che viene attribuita automaticamente, ed è soggetta a cambiamenti).

6.12 Numerazione e citazione di equazioni

Importante

La numerazione di tutte le equazioni deve apparire a sinistra, deve essere progressiva, e deve seguire le sezioni.

L'opzione `leqno` in `\documentclass[11pt,leqno]{report}` assicura che le equazioni vengano numerate a sinistra (che è molto meglio).

Con `\numberwithin{equation}{section}` nel preambolo si ottiene una numerazione delle equazioni che segue le sezioni: ad esempio l'equazione numerata con (1.3.2) è la seconda equazione della terza sezione del primo capitolo (in questo modo le equazioni numerate sono facili da rintracciare nel testo).

Per le equazioni valgono le stesse regole e osservazioni viste per gli ambienti, ma in questo caso si usa `\eqref` invece di `\ref` (in questo modo L^AT_EX mette automaticamente le parentesi intorno al numero). Quindi l'etichetta `\label{eq:due_piu_due}` si mette subito dopo `\begin{equation}` e si scrive `Equazione~\eqref{eq:due_piu_due}` per citare l'Equazione (6.10.1) (nel caso di `\begin{align}` l'etichetta si mette all'inizio della riga corrispondente). A volte l'equazione non è propriamente un'“equazione”, ma magari una qualche formula centrata, o un'implicazione: in ogni caso, ci si può sempre riferire usando `\eqref` senza specificare altro: ad esempio invece di “L'Equazione (6.10.1)” si può dire “la (6.10.1)”. Questo va bene proprio perché usando `\eqref` il numero compare con le parentesi intorno, e questo accade solo con le equazioni; non funzionerebbe con altri ambienti, visto che 6.10.1 potrebbe riferirsi a teoremi, lemmi, osservazioni... e non sarebbe immediatamente chiaro di cosa si tratta.

Importante

Tranne che per le equazioni, quando ci si riferisce al numero di un ambiente, bisogna sempre specificare l'ambiente (ad esempio non “per 6.10.1” ma “per il Teorema 6.10.1”).

6.13 Bibliografia e citazioni di referenze

Per la bibliografia è bene usare “BibTeX”. Rimandando a una sana ricerca di informazioni a riguardo su internet, diamo qui solo alcune indicazioni sommarie.

Si crea un file con estensione .bib, ad esempio “biblio.bib”, e si mette nella stessa cartella del file .tex. In questo file compariranno le referenze nel formato opportuno: ad esempio

```
@book {Artin_AlgebraBook,  
  AUTHOR = {Artin, Michael},  
  TITLE = {Algebra},  
  PUBLISHER = {Prentice Hall, Inc., Englewood  
  Cliffs, NJ},  
  YEAR = {1991},  
}
```

Utile

Sia nel database MathSciNet che nel repository arXiv, per ogni articolo si trova la referenza in formato BibTeX da copiare e incollare. Questo è forse il motivo principale per usare BibTeX.

Poi si mettono in fondo al documento (appena prima di `\end{document}`) i comandi `\bibliographystyle{amsalpha}` e `\bibliography{biblio}`: il primo stabilisce lo stile di come appaiono le referenze e le loro citazioni (in questo caso con le prime lettere dei cognomi degli autori e l’anno di pubblicazione), mentre il secondo richiama il file .bib, in questo caso biblio.bib, per poi creare e includere nel file la bibliografia.

Per citare referenze dalla bibliografia nel testo, si usa il comando `\cite{}`. Ad esempio la citazione [Art91] si ottiene col comando `\cite{Artin_AlgebraBook}`, dove `Artin_AlgebraBook` è l’etichetta della referenza (il primo campo che appare in una referenza bibtex). Se si deve citare un teorema/corollario/lemma all’interno di un articolo/libro, indicarlo con [Art91, Corollary 1.4.13], per cui si è usato il comando `\cite[Corollary~1.4.13]{Artin_AlgebraBook}`.

6.14 Equazioni lunghe e spiegazioni di passaggi

Se c’è bisogno di andare a capo con un’equazione, o una serie di equazioni, si usi `\begin{align*}` (abbiamo già discusso l’eventuale numerazione), come nell’esempio seguente:

$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= (a+b) \cdot (a+b) \\
 &= a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2 \\
 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
 (\text{usando } a^2 + b^2 \geq 0) &\geq 2ab
 \end{aligned}$$

dove le successive (dis)uguaglianze vengono allineate al primo segno di uguale. Questo in genere permette di usare lo spazio alla sinistra dei simboli di (dis) uguaglianza per motivare i passaggi.

Se i membri della prima equazione sono troppo grandi, si può allineare già la prima (dis)uguaglianza al primo termine, e poi le altre al simbolo di (dis)uguaglianza.

Un caso borderline è questo:

$$\begin{aligned}
 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)^2 &= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 \\
 &\quad + (x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)^2 \\
 &\quad + (x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_2 - x_2y_4)^2 \\
 &\quad + (x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)^2
 \end{aligned}$$

che si può scrivere (forse meglio?) ad esempio come

$$\begin{aligned}
 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)^2 &= \\
 &= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)^2 \\
 &\quad + (x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_2 - x_2y_4)^2 + (x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)^2
 \end{aligned}$$

(si noti il simbolo di uguaglianza alla fine della prima riga).

Sono da evitarsi simboli e/o parole sui segni di (dis)uguaglianza per dare spiegazioni: ad esempio **non** scrivere

$$(2+2) + 2 \stackrel{(6.10.1)}{=} 4 + 2 = 6$$

(per dire che l'uguaglianza segue dalla (6.10.1)), ma meglio usare le parole, ad esempio:

Usando la (6.10.1) si ha

$$(2+2) + 2 = 4 + 2 = 6.$$

Ovviamente questo vale anche all'interno di equazioni lunghe: **evitare**

$$\begin{aligned} \left(\frac{8}{4} + \frac{6}{3}\right) + 2 &= (2 + 2) + 2 \\ &\stackrel{(6.10.1)}{=} 4 + 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

ma scrivere piuttosto

$$\begin{aligned} \left(\frac{8}{4} + \frac{6}{3}\right) + 2 &= (2 + 2) + 2 \\ \text{(usando (6.10.1))} &= 4 + 2 \\ &= 6, \end{aligned}$$

o eventualmente anche:

$$\begin{aligned} \left(\frac{8}{4} + \frac{6}{3}\right) + 2 &= (2 + 2) + 2 \\ &= 4 + 2 \\ &= 6, \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza segue da (6.10.1).

6.15 Figure

Per le figure si usa l'ambiente `\begin{figure}`, con le sue opzioni. Le figure vanno numerate con le sezioni, come nell'esempio seguente:

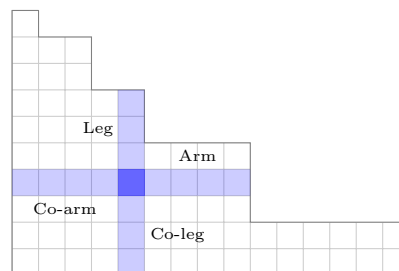


Figura 6.15.1

Qui la Figura 6.15.1 è la prima figura della sezione 11 del capitolo 6. Per imporre questa numerazione va incluso il package `\usepackage{chngcntr}` seguito dal comando `\counterwithin{figure}{section}`. Per dare l'etichetta alla figura si usa come sempre `\label{fig:notation}`, messo subito prima di `\end{figure}`, e per citarla si usa il solito `\ref{fig:notation}`. Per la didascalia (“caption”, in inglese), si usa il package `\usepackage{caption}` e il comando `\caption{}` prima di `\end{figure}`: in questo esempio la didascalia è vuota. Per la didascalia dell'esempio successivo si è usato il comando `\caption{Un cammino di Schr\{o}der.}` :

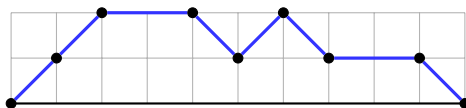


Figura 6.15.2: Un cammino di Schröder.

Utile

Per fare le figure (specie in combinatoria), può essere utile imparare a usare il package `\usepackage{tikz}`: essendo basato sulle coordinate cartesiane, si presta particolarmente bene a creare script (ad esempio in Python) che producono figure in automatico.

Bibliografia

- [Art91] Michael Artin, *Algebra*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [EG21] Ömer Eğecioğlu and Adriano M. Garsia, *Lessons in enumerative combinatorics*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 290, Springer, Cham, 2021.