

Analisi Matematica A e B

Soluzioni prova scritta n. 1

Corso di laurea in Fisica, 2017-2018

29 maggio 2018

1. Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$6 \sin x \leq 6x - x^3 + x^4.$$

Soluzione. Posto

$$f(x) = 6x - x^3 + x^4 - 6 \sin x$$

dobbiamo mostrare che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per studiare il segno della funzione calcoliamo le derivate successive:

$$f'(x) = 6 - 3x^2 + 4x^3 - 6 \cos x,$$

$$f''(x) = -6x + 12x^2 + 6 \sin x,$$

$$f'''(x) = -6 + 24x + 6 \cos x,$$

$$f''''(x) = 24 - 6 \sin x.$$

Essendo $|\sin x| \leq 1$ si ha $f''''(x) \geq 24 - 6 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque f''' è strettamente crescente. Visto che $f'''(0) = 0$ possiamo concludere che $f'''(x) > 0$ per $x > 0$ e $f'''(x) < 0$ per $x < 0$. Dunque $f''(x)$ ha un minimo assoluto per $x = 0$ ed essendo $f''(0) = 0$ significa che $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ma allora $f'(x)$ è crescente e, ancora, essendo $f'(0) = 0$ deduciamo che $f'(x) \geq 0$ per $x \geq 0$ e $f'(x) \leq 0$ per $x \leq 0$. Dunque f ha un minimo assoluto in $x = 0$ ed essendo $f(0) = 0$ deduciamo che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, come dovevamo dimostrare. \square

Soluzione alternativa. La formula di Taylor con il resto di Lagrange garantisce che esiste $\xi \in \mathbb{R}$ tale che

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \sin \xi \cdot \frac{x^4}{4!}.$$

(la derivata quarta di $\sin x$ è $\sin x$). Dunque si ha, sfruttando il fatto che $\sin \xi \leq 1$:

$$\begin{aligned} 6 \sin x &= 6x - x^3 + \sin \xi \cdot \frac{x^4}{4} \\ &\leq 6x - x^3 + \frac{x^4}{4} \\ &\leq 6x - x^3 + x^4. \end{aligned}$$

□

2. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si determini il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^\alpha \int_0^k e^{-k^2 x^2} dx.$$

Soluzione. Facendo il cambio di variabile $x = y/k$, $dx = dy/k$ si osserva che

$$b_k = \int_0^k e^{-k^2 x^2} dx = \frac{1}{k} \int_0^{k^2} e^{-y^2} dy$$

e quindi

$$\frac{1}{k} \int_0^1 e^{-y^2} dy \leq b_k \leq \frac{1}{k} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy.$$

L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$ è positivo e notoriamente convergente. Dunque il termine generico $a_k = k^\alpha b_k$ della serie data è asintoticamente equivalente a $k^{\alpha-1}$. La serie è a termini positivi e dunque il suo carattere coincide con il carattere della serie $\sum k^{\alpha-1}$ che è una serie armonica generalizzata. Sappiamo quindi che la serie converge per $\alpha - 1 < -1$ cioè per $\alpha < 0$ e diverge altrimenti. □

3. Trovare tutti i numeri $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali esiste una funzione $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 che soddisfa le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} u''(x) = \lambda u(x), \\ u(0) = u(1) = 0, \\ u'(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale $u'' = \lambda u$ è una equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 - \lambda$. Se $\lambda > 0$ le radici del polinomio caratteristico sono reali e precisamente $\pm\sqrt{\lambda}$ dunque le soluzioni dell'equazione differenziale sono della forma

$$u(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. La condizione $u(0) = 0$ ci dice che $c_1 + c_2 = 0$ da cui $c_2 = -c_1$ e quindi

$$u(x) = c_1 \left[e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x} \right]$$

e la condizione $u(1) = 0$ ci dice allora che $c_1 = 0$ in quanto la quantità tra parentesi quadre è positiva se $x > 0$ e $\lambda > 0$. Dunque $u(x) = 0$ ma allora non è possibile che sia $u'(0) = 1$. Non ci sono dunque soluzioni con $\lambda > 0$.

Se $\lambda = 0$ l'equazione diventa $u''(x) = 0$ le cui soluzioni sono

$$u(x) = c_1x + c_2.$$

se $u(0) = u(1) = 0$ si trova, come prima, $c_1 = c_2 = 0$ e quindi $u(x) = 0$ e $u'(0) = 0$. Neanche in questo caso ci sono soluzioni.

Se $\lambda < 0$ le radici del polinomio caratteristico sono complesse coniugate, più precisamente sono: $\pm i\sqrt{-\lambda}$ e tutte le soluzioni reali dell'equazione differenziale possono quindi essere scritte nella forma:

$$u(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ponendo $u(0) = 0$ si ottiene $c_2 = 0$ e quindi:

$$u(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

da cui

$$u(1) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}).$$

Imponendo $u(1) = 0$ si ottiene quindi

$$\sqrt{-\lambda} = k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Visto che k e $-k$ danno lo stesso valore di λ possiamo restringerci a $k \in \mathbb{N}$ e visto che $\lambda < 0$ dobbiamo escludere $k = 0$, dunque si ha:

$$\lambda = -k^2\pi^2, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Si ha inoltre

$$u'(0) = \sqrt{-\lambda}c_1$$

e quindi la condizione $u'(0) = 1$ può essere certamente soddisfatta scegliendo

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}.$$

□