SOLUZIONE del COMPITO DI ANALISI I e II
Corso di laurea in Fisica
2 - 02 - 2018

---

1. Esercizio 1.
   Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}((-1)^n n^\alpha + \sin n)$$

Abbiamo:

$$|\frac{\ln n}{n^2} \sin n| \leq \frac{1}{n^{3/2}} \quad \forall n$$

e la serie $\sum \frac{\ln n}{n^2} \sin n$ è assolutamente convergente e quindi convergente. Quindi la serie data converge se e solo se converge la serie a segni alterni

$$\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n^{2-\alpha}}$$

.
Se $\alpha \geq 2$ la serie non converge perchè il termine generale non è infinitesimo.
Se $\alpha < 2$ possiamo applicate il criterio di Leibnitz; posto $\beta = 2-\alpha > 0$ abbiamo infatti :

$$\lim_{n=\infty} \frac{\ln n}{n^\beta} = 0$$

inoltre presa $f(x) = \frac{\ln x}{x^\beta}$ è $f'(x) = \frac{1}{x^{\beta+1}} - \frac{\beta \ln x}{x^{\beta+1}} = \frac{1-\beta \ln x}{x^{\beta+1}}$ che è definitivamente negativa, per cui il termine della serie decresce a zero.

2. Esercizio 2
   Calcolare, se esiste:

$$\lim_{x=0} \frac{\ln(\cos x) + \ln(e^x - x) - x^3/6}{x^2 \arcsin(x^2)}$$

Utilizziamo le formule:

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

$$e^x - x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$$

$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$$
$$\ln(\cos(x)) = \ln(1-(1-\cos(x))) =$$
$$= -(1-\cos(x)) - \frac{(1-\cos(x))^2}{2} + o(x^4) =$$
$$= -(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)) - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + o(x^4)$$
$$\ln(e^x - x) = \ln(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)) =$$
$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2}(\frac{x^4}{4} + o(x^4))$$
$$\lim_{x=0} \frac{x}{\arcsin x} = 1$$

Si ha

$$\lim_{x=0} \frac{\ln(\cos x) + \ln(e^x - x) - \frac{x^3}{6}}{x^2 \arcsin(x^2)} =$$
$$= \lim_{x=0} \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + o(x^4) - \frac{x^3}{6}}{x^4}$$
$$= \lim_{x=0} \frac{x^4(\frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{8})}{x^4} = \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{6}$$

3. Esercizio 3

Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$u'' + u' = \frac{1}{1+e^{2t}}$$

l'equazione omogenea associata è:

$$u'' + u' = 0$$

che ha soluzione generale:

$$u(t) = C_1 e^{-t} + C_2$$

Cerchiamo ora una soluzione della forma:

$$u(t) = C_1(t) e^{-t} + C_2(t)$$

da cui:

$$u'(t) = C_1'(t) e^{-t} - C_1(t) e^{-t} + C_2'(t)$$

Imponiamo:

$$C_1'(t) e^{-t} + C_2'(t) = 0$$

Si ha allora:

$$u'(t) = -C_1(t)e^{-t}$$

$$u''(t) = -C_1'(t)e^{-t} + C_1(t)e^{-t}$$

e quindi

$$u''(t) + u'(t) = -C_1'(t)e^{-t} + C_1(t)e^{-t} - C_1(t)e^{-t} = \frac{1}{1+e^{2t}}$$

$$C_1'(t) = -\frac{e^t}{1+e^{2t}}$$

da cui

$$C_1(t) = -\arctan(e^t)$$

e

$$C_2'(t) = -C_1(t)e^{-t} = \frac{1}{1+e^{2t}}$$

da cui

$$C_2(t) = \int \frac{1}{1+e^{2t}} dt$$

Per calcolare l'integrale, poniamo $y = e^t$; è $e^t dt = dy$, $dt = dy/y$.

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{1+e^{2t}} dt = \\ &\qquad = \int \frac{1}{y} \frac{1}{1+y^2} dy = \int \frac{dy}{y} - \int \frac{y dy}{1+y^2} = \\ &\qquad = \ln y - \frac{1}{2} \ln(1+y^2) = t - \frac{1}{2} \ln(1+e^{2t}) = \\ &\qquad = C_2(t) \end{aligned}$$

In conclusione la formula della soluzione generale è data dalla:

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 - \arctan(e^t)e^{-t} + t - \frac{1}{2} \ln(1+e^{2t})$$

al variare di C_1 e C_2 in $\mathbb{R}$.