Correzione del secondo compitino di Analisi 1 e 2

Del Nin Giacomo* Ferrigo Marco† Stra Federico‡

11 febbraio 2014

Esercizio 1

Testo

Dimostrare, per $e \leq y \leq x$, la disuguaglianza

$$x^y \leq y^x.$$

Dire poi se tale disuguaglianza è vera anche per $2 \leq x \leq y$.

Soluzioni

Soluzione 1 Per prima cosa è possibile notare che, per la monotonia crescente della funzione esponenziale, la disuguaglianza da dimostrare è equivalente a

$$y \log x \leq x \log y \qquad \text{per ogni } e \leq y \leq x. \tag{1}$$

Siccome $\log x \geq \log y \geq 1 > 0$, quest'ultima equivale a

$$\frac{y}{\log y} \leq \frac{x}{\log x} \qquad \text{per ogni } e \leq y \leq x. \tag{2}$$

La (2), per definizione, significa che la funzione

$$f(t) = \frac{t}{\log t}$$

è debolmente crescente nell'intervallo $[e, +\infty)$. Dimostriamo questo fatto.

Siccome f è derivabile, possiamo tentare l'approccio con lo studio della derivata prima. Risulta effettivamente

$$f'(t) = \frac{\log t - \frac{t}{t}}{(\log t)^2} = \frac{\log t - 1}{(\log t)^2} \geq 0 \qquad \text{per ogni } t \in [e, +\infty),$$

*delnin@mail.dm.unipi.it
†ferrigo@mail.dm.unipi.it
‡stra@mail.dm.unipi.it

quindi la disuguaglianza di partenza è valida.

Il caso $2 \le y \le x$ si può liquidare facilmente esibendo un controesempio: con $y = 2$ e $x = 3$ si otterrebbe infatti $3^2 \le 2^3$, falso.

In alternativa, si può notare che

$$f'(t) = \frac{\log t - 1}{(\log t)^2} < 0 \qquad \text{per ogni } t \in (2, e),$$

quindi nell'intervallo $2 \le y < x \le e$ vale la disuguaglianza opposta $x^y > y^x$.

Soluzione 2 Partendo dalla (1), si può dividere per le quantità positive x e y e ottenere che la disuguaglianza di partenza equivale a

$$\frac{\log y}{y} \ge \frac{\log x}{x} \qquad \text{per ogni } e \le y \le x. \tag{3}$$

Analogamente a quanto fatto sopra, dimostrare la (3) si riduce a verificare che la funzione

$$g(t) = \frac{\log t}{t}$$

è debolmente decrescente nell'intervallo $[e, +\infty)$. In effetti, in tale intervallo si ha

$$g'(t) = \frac{\frac{t}{t} - \log t}{t^2} = \frac{1 - \log t}{t^2} \le 0.$$

Relativamente al caso $2 \le y \le x$, anche questo approccio ci mostra che per $2 \le y < x \le e$ vale la disuguaglianza opposta $x^y > y^x$ poiché

$$g'(t) = \frac{1 - \log t}{t^2} > 0 \qquad \text{per ogni } t \in (2, e).$$

Soluzione 3 Elevando entrambi i membri a $1/(xy) > 0$, la disuguaglianza da dimostrare diventa $x^{1/x} \le y^{1/y}$. Dimostrare quest'ultima significa provare che la funzione

$$h(t) = t^{1/t} = \exp\left(\frac{\log t}{t}\right)$$

è decrescente su $[e, +\infty)$. Calcolando la derivata prima, risulta

$$h'(t) = \exp\left(\frac{\log t}{t}\right) \frac{\frac{t}{t} - \log t}{t^2} = t^{1/t} \frac{1 - \log t}{t^2} \le 0 \qquad \text{per ogni } t \in [e, +\infty),$$

il che prova la tesi.

Anche questo approccio si adatta allo studio del caso $2 \le y < x \le e$, infatti

$$h'(t) = t^{1/t} \frac{1 - \log t}{t^2} > 0 \qquad \text{per ogni } t \in (2, e),$$

quindi h è crescente in $(2, e)$ e si ottiene la disuguaglianza opposta.

Soluzione 4 Se $x = y$ vale ovviamente l'uguaglianza. Supponiamo nel seguito $e \leq y < x$. Sia $\alpha = x/y > 1$. Si ha che

$$
\begin{aligned}
(\alpha y)^y &\leq y^{\alpha y} && \text{se e solo se} \\
y \log(\alpha y) &\leq \alpha y \log y && \text{se e solo se} \\
\log \alpha + \log y &\leq \alpha \log y && \text{se e solo se} \\
\frac{\log \alpha}{\alpha - 1} &\leq \log y. &&
\end{aligned} \tag{4}
$$

È noto che $\log \alpha \leq \alpha - 1$ per ogni $\alpha > 0$, quindi per $\alpha > 1$ vale

$$\frac{\log \alpha}{\alpha - 1} \leq 1 \leq \log y,$$

che dimostra la (4).

Soluzione 5 Se $x = y$ vale ovviamente l'uguaglianza. Supponiamo nel seguito $e \leq y < x$. Sia $h = x - y > 0$. Si ha che

$$
\begin{aligned}
(y+h)^y &\leq y^{y+h} && \text{se e solo se} \\
\left(\frac{y+h}{y}\right)^y &\leq y^h && \text{se e solo se} \\
\left(1 + \frac{h}{y}\right)^{\frac{y}{h}} &\leq y, &&
\end{aligned}
$$

la quale è vera perché è noto che

$$\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \leq e \qquad \text{se } t > 0$$

e per ipotesi $e \leq y$.

Commenti

- Un errore abbastanza diffuso (e grave) è l'incorretta deduzione logica della tesi. Dovendo dimostrare una proposizione A, alcuni deducono la catena di implicazioni
$$A \implies B \implies C \implies \ldots \implies Z,$$
infine, accorgendosi della validità di Z, inferiscono la veridicità della tesi A.

  Nel corso di un ragionamento, è sempre opportuno accorgersi se quello che si sta considerando è equivalente alla tesi, solo necessario o solo sufficiente. Se non si presta attenzione a questo fatto è possibile altrimenti dedurre tutto dal tutto.

- $f(x) \leq g(x)$ non implica $f'(x) \leq g'(x)$.

- Non si può fissare il valore di una variabile, diciamo x, svolgere qualche passaggio di manipolazioni algebriche e poi utilizzarla come se fosse libera di variare, per esempio per calcolare un limite per $x \to \infty$.

- Dimostrare che $A \leq B$ è diverso da dimostrare che $\lim A \leq \lim B$. In particolare, dalla seconda non si deduce neanche che la prima vale definitivamente. Per esempio:
$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right),$$
ma
$$1 + \frac{1}{x} \geq 1 - \frac{1}{x}.$$
In ogni caso, nell'esercizio era richiesto di provare che la disuguaglianza vale sempre, non solo per x sufficientemente grandi.

- Non *bluffare* con le disuguaglianze "note", a volte vere, a volte pure false.

Valutazione

- 7 punti per la trattazione corretta del caso $e \leq y \leq x$;
- 1 punto se si fornisce un controesempio per il caso $2 \leq y \leq x$;
- circa 4 punti (a seconda della precisione) se si dimostra solo che la disuguaglianza vale per x sufficientemente grande.

Esercizio 2

Testo

Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali. Dimostrare che l'equazione
$$e^x \sin x + e^{-x} \cos x = P(x)$$
amette infinite soluzioni su $(-\infty, 0]$ e infinite su $[0, +\infty)$.

Soluzione

Consideriamo la funzione continua
$$f(x) = e^x \sin x + e^{-x} \cos x - P(x).$$
Dobbiamo dimostrare che f ammette infiniti zeri in $(-\infty, 0]$ e infiniti in $[0, +\infty)$.

Consideriamo le successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite da
$$a_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \qquad b_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi.$$

Si ha che

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty}\Big(e^{a_n} - P(a_n)\Big) = +\infty$$
$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty}\Big(-e^{b_n} - P(b_n)\Big) = -\infty$$

perché $a_n \to \infty$ e $b_n \to \infty$. Allora esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ vale

$$f(a_n) > 0 > f(b_n).$$

Dal teorema dei valori intermedi segue che nell'intervallo (a_n, b_n) c'è almeno un punto in cui f si annulla; pertanto in $[0, +\infty)$ ci sono infinite soluzioni dell'equazione originaria.

Il caso $(-\infty, 0]$ si tratta in maniera analoga, considerando le due successioni $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite da

$$c_n = -\pi - 2n\pi, \qquad d_n = -2n\pi.$$

Vale infatti

$$\lim_{n\to\infty} f(c_n) = \lim_{n\to\infty}\Big(-e^{-c_n} - P(c_n)\Big) = -\infty$$
$$\lim_{n\to\infty} f(d_n) = \lim_{n\to\infty}\Big(e^{-d_n} - P(d_n)\Big) = \infty,$$

perché $c_n \to -\infty$ e $d_n \to -\infty$. Quindi esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \tilde{n}$ vale

$$f(c_n) < 0 < f(d_n),$$

pertanto in (c_n, d_n) si trova almeno una soluzione.

Commenti

- L'errore più diffuso in assoluto è stato fraintendere completamente il testo dell'esercizio. Una quantità considerevole di studenti ha inteso che P fosse la funzione $P(x) = e^x \sin x + e^{-x}\cos x$ e ha cercato gli zeri di quest'ultima, mentre nel testo si diceva chiaramente che P è un polinomio, ovvero una funzione della forma $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ per certe costanti reali $a_0, \ldots, a_n$.

  L'esercizio assegnava queste due funzioni, una esplicita, l'altra generica, e chiedeva di studiare le intersezioni fra i due grafici.

  Trovare solo gli zeri della funzione $e^x \sin x + e^{-x}\cos x$ equivale di fatto all'aver considerato solamente il caso $P = 0$, ma è cosa ben diversa dichiarare esplicitamente di volersi interessare solo di questo caso oppure limitarsi a questo perché si è frainteso il problema.

- I polinomi a volte danno origine a delle difficoltà, come quando uno dice che un polinomio reale ha sempre almeno una radice reale, oppure che ha infinite radici, o che è uguale allo svilutto di Taylor dell'altra funzione, etc…

- Quando si cercano gli zeri di una funzione, non si può buttare via un termine semplicemente perché è "piccolo"; specificatamente, nel nostro caso, trascurare $e^{-x}\cos x$ quando $x \in [0, +\infty)$. Anche se g è una funzione "piccola" (il termine è vago, ma del resto è come è stato utilizzato in alcune risoluzioni), gli zeri di $f + g$ possono essere ben diversi da quelli di f (trovare degli esempi è lasciato come esercizio).

- Sono comparse varie versioni errate del teorema dei valori intermedi: per esempio,
  - che in un intervallo (a, b) una funzione continua f assume *solo* valori in $[f(a), f(b)]$;
  - che f assume infiniti valori in un intervallo infinito come $[0, +\infty)$;
  - che una funzione continua è surgettiva.

- La funzione $e^x \sin x + e^{-x}\cos x$ non è periodica!

- "Oscilla fra $-\infty$ e $+\infty$" non significa niente.

  Per dire che $e^x \sin x$ interseca $P(x)$, non basta dire che $e^x \sin x$ oscilla tanto. Se infatti fosse $P(x) = e^{x^2}$ la tesi sarebbe falsa. Occorre quindi dare qualche sorta di maggiorazione per P e studiarne il comportamento.

Valutazione

- Massimo 3 punti nel caso di fraintendimento del testo (ovvero si intende che il "polinomio" P sia la funzione scritta nel testo);

- un paio di punti in meno rispetto al massimo se non si studia in maniera dettagliata il comportamento polinomiale in relazione a quello esponenzionale, ma ci si limita a dire che "la funzione oscilla sempre di più quindi interseca il grafico del polinomio".

Esercizio 3

Testo

Dire per quali valori del parametro reale α, $-\infty < \alpha < 2$, la funzione

$$x^\alpha \sin(1/x) \log x$$

risulta uniformemente continua su $(0, +\infty)$.

Facoltativo: studiare il caso $\alpha = 2$.

Soluzione

Sia $f_\alpha(x) = x^\alpha \sin(1/x) \log x$. Condizione necessaria affinché f_α sia uniformemente continua è che esista finito il limite $\lim_{x\to 0} f_\alpha(x)$. Se $\alpha \leq 0$, si ha che

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \log x = -\infty,$$

quindi, prese le due successioni infinitesime $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ date da

$$x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1}, \qquad x'_n = \left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1},$$

vale

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_\alpha(x_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n^\alpha \log x_n = -\infty, \\ \lim_{n\to\infty} f_\alpha(x'_n) &= \lim_{n\to\infty} -(x'_n)^\alpha \log x'_n = +\infty. \end{aligned}$$

Ne segue che non esiste il limite $\lim_{x\to 0} f_\alpha(x)$, quindi f_α non è uniformemente continua.

Supponiamo ora invece $\alpha > 0$. Applicando de l'Hopital per la forma indeterminata ∞/∞,

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \log x = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0$$

e, siccome $\sin(1/x)$ è limitata, anche

$$\lim_{x\to 0} \sin(1/x) x^\alpha \log x = 0.$$

Ne deduciamo che in tal caso f_α può essere estesa per continuità a $[0, +\infty)$, dunque per Heine-Cantor essa è uniformemente continua su ogni intervallo compatto del tipo $[0, c]$ con $c > 0$.

Studiamo il comportamento di f_α per x tendente a infinito. Una condizione sufficiente a garantire l'uniforme continuità su un intervallo del tipo $[c, +\infty)$ è che la derivata prima sia limitata: infatti in questo caso f_α risulta lipschitziana.

Un modo per dimostrare che la derivata è limitata in $[c, +\infty)$ è verificare che essa ammette limite finito per $x \to \infty$. La derivata prima è

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin(1/x) \log x + x^\alpha \left(-\frac{1}{x^2} \cos(1/x)\right) \log x + x^\alpha \sin(1/x) \frac{1}{x}.$$

Mostriamo che per $\alpha < 2$ ciascuno dei tre addendi tende a 0 per $x \to \infty$. Osserviamo che

$$\lim_{x\to\infty} x \sin(1/x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

e (sempre grazie a de l'Hopital)

$$\lim_{x\to\infty} x^\beta \log x = 0 \qquad \text{per } \beta < 0.$$

Abbiamo dunque

$$\lim_{x\to\infty} \alpha x^{\alpha-1} \sin(1/x) \log x = \alpha \left(\lim_{x\to\infty} x \sin(1/x)\right) \left(\lim_{x\to\infty} x^{\alpha-2} \log x\right) = 0.$$

Per il secondo termine,

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha-2}\cos(1/x)\log x = \Big(\lim_{x\to\infty} x^{\alpha-2}\log x\Big)\Big(\lim_{x\to\infty}\cos(1/x)\Big) = 0.$$

Quanto all'ultimo termine,

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}\sin(1/x)\frac{1}{x} = \Big(\lim_{x\to\infty} x\sin(1/x)\Big)\Big(\lim_{x\to\infty} x^{\alpha-2}\Big) = 0.$$

Pertanto, quando $0<\alpha<2$, f_α risulta uniformemente continua sia su $(0,c]$ sia su $[c,+\infty)$, dunque anche sull'unione $(0,+\infty)$.

Un modo alternativo per trattare il caso $0<\alpha<1$ consiste nell'accorgersi che $f_\alpha(x)$ ammette limite finito per $x\to\infty$. Infatti

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}\sin(1/x)\log x = \Big(\lim_{x\to\infty} x\sin(1/x)\Big)\Big(\lim_{x\to\infty} x^{\alpha-1}\log x\Big) = 0.$$

Facoltativo. Siano $\alpha=2$ e $f=f_2$. Mostriamo innanzitutto che la derivata prima tende a $+\infty$ per $x\to\infty$. Si ha infatti

$$f'(x) = 2x\sin(1/x)\log x - \cos(1/x)\log x + x\sin(1/x),$$

dunque

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f'(x) &= \lim_{x\to\infty}\Big[\Big(2x\sin(1/x)-\cos(1/x)\Big)\log x\Big] + \lim_{x\to\infty} x\sin(1/x) = \\ &= \lim_{x\to\infty}\Big(2x\sin(1/x)-\cos(1/x)\Big)\lim_{x\to\infty}\log x + \lim_{x\to\infty} x\sin(1/x) = \\ &= 1\cdot(+\infty)+1 = +\infty.\end{aligned}$$

Quanto fatto finora non è sufficiente per dire che la funzione non è uniformemente continua. Bisogna infatti concludere utilizzando per esempio il teorema di Lagrange.

Fissato $\varepsilon>0$, mostriamo che non esiste $\delta>0$ tale che $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$ se $|y-x|\le\delta$. Questo significa che per ogni $\delta>0$ si trovano x e y tali che

$$|y-x|\le\delta \qquad \text{e} \qquad |f(y)-f(x)|\ge\varepsilon.$$

Per far ciò, è sufficiente prendere $M>0$ tale che

$$f'(\xi)\ge\frac{\varepsilon}{\delta} \qquad \text{per } \xi\ge M.$$

A questo punto, presi $x=M$ e $y=M+\delta$, si ha che

$$|y-x|=\delta \qquad \text{e} \qquad |f(y)-f(x)| = f'(\xi)\,|y-x| \ge \frac{\varepsilon}{\delta}\cdot\delta = \varepsilon,$$

dove $\xi\in(x,y)$ è dato dal teorema di Lagrange.

Commenti ed errori comuni

- È sbagliato applicare il teorema di de l'Hopital senza controllare di essere effettivamente in presenza di una forma indeterminata (tipicamente le situazioni in cui si poteva applicare dipendevano tutte da α)
- Per controllare l'uniforme continuità della funzione data bisogna esaminare il suo comportamento sia sugli intervalli del tipo $(0, c]$, sia su quelli del tipo $[c, +\infty)$, con $c \in \mathbb{R}^+$. In entrambi i casi ci sono alcuni criteri sufficienti ed alcuni necessari; alcuni hanno fatto confusione, oppure li hanno considerati necessari *e* sufficienti.
  Per il caso $(0, c]$ un criterio necessario e sufficiente affinché f sia u.c. all'interno di esso è che esista finito il limite
  $$\lim_{x \to 0^+} f(x)$$
  Per il caso $[c, +\infty)$ alcuni criteri sufficienti sono:
  - esiste finito il limite $\lim_{x \to \infty} f(x)$;
  - f ammette un asintoto per $x \to \infty$. Questo significa che esistono $m, q \in \mathbb{R}$ tali che
    $$\lim_{x \to \infty} (f(x) - mx - q) = 0$$
  - $f'(x)$ limitata su $[c, +\infty)$ (che implica la lipschitzianità di f);
  - $\lim_{x \to \infty} f'(x)$ esiste ed è finito (infatti questo, unito alla continuità di $f'(x)$, implica che $f'(x)$ sia limitata su $[c, +\infty)$);

  Un criterio necessario è invece:
  esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $|f(x)| \leq ax + b \quad \forall x \in [c, +\infty)$ (a volte chiamato teorema della farfalla). Questo era utile per svolgere il punto facoltativo.
- Alcuni hanno diviso il limite di $f(x)$ per $x \to 0$ in due parti, di cui una era $\lim_{x \to 0} \sin(1/x)$. Questo non si può fare perché questo limite non esiste; bisognava piuttosto maggiorare e minorare f con due termini (utilizzando che $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$) e utilizzare il teorema dei carabinieri.
- $f(x) \leq g(x)$ non implica che $f'(x) \leq g'(x)$; analogamente se g è u.c. e $f \leq g$, non è vero in generale che f è u.c. (non vale neanche se $|f| \leq g$).

Esercizio 4

Testo

Calcolare
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{\log(x+1)} \right).$$

Soluzione

- Prima soluzione: utilizzando solo De l'Hopital.

  Consideriamo:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x}-\frac{1}{\log(x+1)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(x+1)\log(x+1)-x}{x\log(x+1)}\right).$$

  Tale limite è nella forma indeterminata $[\frac{0}{0}]$ e le ipotesi del teorema di De l'Hopital sono soddisfatte[1], quindi passo a considerare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)+\frac{x+1}{x+1}-1}{\log(x+1)+\frac{x}{x+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{\log(x+1)+\frac{x}{x+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\log(x+1)}{(x+1)\log(x+1)+x};$$

  è ancora nella forma indeterminata $[\frac{0}{0}]$, e quindi considero:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)+\frac{x+1}{x+1}}{\log(x+1)+\frac{x+1}{x+1}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)+1}{\log(x+1)+2}=\frac{1}{2}.$$

  Quindi per il teorema di De l'Hopital, vale:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x}-\frac{1}{\log(x+1)}\right)=\frac{1}{2}.$$

- Un'altra strada era osservare:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x}-\frac{1}{\log(x+1)}\right)=1+\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\log(x+1)}\right)=1+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\log(x+1)-x}{x\log(x+1)}\right),$$

  e concludere in modo analogo.

- Si poteva risolvere anche utilizzando il limite notevole $\lim \frac{\log(x+1)}{x}=1$ al posto di De l'Hopital in qualche passaggio.

Commenti

- Molti applicano il teorema di De l'Hopital senza nemmeno accennare alle ipotesi che tale teorema deve verificare. Non è stato penalizzato tale errore in termini di punteggio, ma è bene ricordare che le ipotesi vanno verificate.

- Un ragionamento molto rischioso (e fallace in questo caso), che andrebbe sempre evitato è il seguente.

  Siccome:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x}=1$$

  vale $\log(x+1)\sim x$ (qualunque cosa voglia dire).

[1] Sarebbe bene verificarlo, o perlomeno notare che è semplice verificarlo.

Dunque posso sostituire nel limite e viene:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x}-\frac{1}{\log(x+1)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}\right)=1+\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=1.$$

Che è sbagliato, poiché frutto di un ragionamento che non ha fondamento. Per fortuna questo errore è capitato in pochissimi casi.

- Continuano ad esserci errori del tipo:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\log(x+1)+\log(x+1)-x}{x\log(x+1)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\log(x+1)+0-0}{x\log(x+1)}\right)=1,$$

ovvero in cui alcune parti dell'argomento vengono *mandate al limite*, e altre no. Questo tipo di errori è sintomo di grosse lacune.

- Molti utilizzano delle formule magiche per risolvere gli esercizi, la più gettonata è

Il limite della somma è la somma dei limiti.

Dico formula magica perché spesso viene utilizzata per tentare di giustificare passaggi falsi, oppure viene spacciata come motivazione di passaggi che, seppur veri, non c'entrano con la somma. Due esempi:

1. La formula magica usata per giustificare passaggi falsi:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(x+1)\log(x+1)-x}{x\log(x+1)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{1}{\log(x+1)}$$

che non esiste, quindi il limite a sinistra non esiste. No!

2. La formula magica utilizzata per giustificare passaggi che non hanno a che fare con la somma:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x+\log(x+1)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{\log(x+1)}{x}}\right)^{-1}=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

in cui il secondo passaggio è giustificato proprio dicendo: il limite di una somma è la somma dei limiti.

Ma in questo caso oltre ad una somma compaiono ben due inversi!

Ciò che viene utilizzato è che, grazie alla continuità delle funzioni coinvolte, si ha:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{\log(x+1)}{x}}\right)^{-1}=\left(1+\frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x}}\right)^{-1}=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

Ciò che ci si aspetta è che gli studenti capiscano che il limite *commuta con le funzioni continue.* La somma, la moltiplicazione, l'inverso, sono funzioni continue. Però bisogna capire il senso di questa frase, non scriverla qua e là per rendere il discorso apparentemente meglio giustificato.