

Meccanica Razionale e Analitica

10/6/04

USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Risolvere il primo oppure il secondo esercizio, il terzo esercizio e la prova al calcolatore

Primo Esercizio

Provare che il funzionale

$$\int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2yx^4) dx$$

nella classe di funzioni ammissibili

$$A = \{y(x) \in C^1([0, 1]), y(1) = 0\}$$

ha minimo assoluto e trovarlo.

Secondo Esercizio

Una lamina pesante $OABC$ uniforme, quadrata, di lato a , ha il vertice O fisso e coincidente con l'origine di un riferimento cartesiano inerziale $Oxyz$ (asse z verticale ascendente). Il lato OA della lamina è inoltre vincolato a muoversi su piano Oxy del riferimento. Tutti i vincoli sono privi di attrito. Sul vertice B agisce una forza elastica attrattiva di legge $\mathbf{f} = -k(B - Q)$, dove $k > 0$ e Q è il punto di coordinate $(0, 0, a)$. Indicati con \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} i versori del riferimento inerziale, si assumano come parametri lagrangiani l'angolo θ formato dal versore \mathbf{k} e dal vettore OC e l'angolo ϕ formato dal versore \mathbf{i} e dal vettore OA . (a) Trovare la lagrangiana. (b) Trovare un integrale primo del moto.

Prova al Calcolatore

(1) Trovare la primitiva della funzione

$$f(x) = x^5 \sqrt{1 + 2x + 2x^2}$$

e verificare per derivazione il risultato ottenuto.
Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Trovare anche tale integrale definito in forma decimale con 4 cifre decimali esatte.

(2) Disegnare il grafico della funzione che in coordinate polari ha l'equazione

$$\rho(\theta) = 2(1 + \cos(\theta))$$

per $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e calcolare l'area della regione di piano contenuta nella curva.

(3) Risolvere il problema di Cauchy

$$\frac{dy}{dt} = -2ty(t) + t, \quad y(t_0) = y_0$$