$\boxed{ES\,1 - \xi}$

$$f(x,y) = x^4 - xy + y^2$$

(i) $$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - y \\ -x + 2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = \underline{0} \iff \begin{cases} y = 4x^3 \\ x = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} y - 32y^3 = 0 \\ x = 2y \end{cases}$$

Da cui $\boxed{\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}}$ P_0 $\vee$ $\boxed{\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{32}} \\ x = \frac{2}{\sqrt{32}} \end{cases}}$ P_1 $\vee$ $\boxed{\begin{cases} y = -\frac{1}{\sqrt{32}} \\ x = -\frac{2}{\sqrt{32}} \end{cases}}$ P_2

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det H_f(0,0) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

I due autovalori hanno segno opposto quindi $(0,0)$ è una sella.

$$H_f(P_2) = H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det H_f(0,0) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 2$$

I due autovalori hanno lo stesso segno, e non possono essere entrambi negativi quindi sono entrambi positivi. P_1 & P_2 sono pti di minimo locale.

(ii) $\lim_{x \to +\infty} f(x,0) = \lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$

di conseguenza $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = +\infty$.

In effetti $f(x,y) = x^4 + \frac{3}{4}y^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \geq x^4 + \frac{3}{4}y^2$

pertanto $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = +\infty$.

- Di conseguenza f deve avere un minimo globale e questo può ~~[illegible]~~ avvenire solo nei punti P_1 e P_2 trovati precedentemente. In effetti

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = f(P_1) = f(P_2) = -\frac{1}{64}$$

(iii) Q è un rettangolo compatto, f ammette massimo e minimo su Q. Il minimo ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ di $f_{|Q}$ coincide col minimo globale

$$\min_{(x,y)} f(x,y) = f(P_1) = -\frac{1}{64} \qquad (P_1 \in Q)$$

Il massimo è raggiunto su ∂Q (non ci sono altri pti stazionari interni a Q)

Esaminando

$f(x,0) = x^4 \quad 0 \leq x \leq 3$

$f(x,2) = x^4 - 2x + 4 \quad$ "

$f(0,y) = y^2 \quad 0 \leq y \leq 3$

~~[illegible]~~

$f(3,y) = 81 - 3y + y^2 \quad 0 \leq y \leq 3$

~~Scopriamo che il massimo è raggiunto~~

Scopriamo che il massimo è raggiunto in $P_3 = (3,0)$

$$\max_{(x,y)\in Q} f(x,y) = f(P_3) = 81$$

$\boxed{\text{ES } 2 - \xi}$ (i) $J_\phi(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$; $\det\left(J_\phi(x,y)\right) = 4(x^2+y^2)$

Il determinante della matrice Jacobiana si annulla solo nell'origine $\Rightarrow$ ϕ è localmente invertibile in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

(ii) Osserviamo che $\phi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \left(\rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) , 2\rho^2\sin\theta\cos\theta\right) =$

$$= \left(\rho^2\cos 2\theta , \rho^2 \sin 2\theta\right)$$

Se $P_1, P_2 \in C$ e $\phi(P_1) = \phi(P_2)$ ~~allora P_1 e P_2 devono avere lo stesso modulo~~ Ponendo $\begin{cases} P_i = (\rho_i\cos\theta_i , \rho_i \sin\theta_i) \\ 0 \le \theta_i < \pi \end{cases}$

otteniamo che deve essere $\rho_1^2 = \rho_2^2$

e $\begin{cases} \cos(2\theta_1) = \cos(2\theta_2) \\ \sin(2\theta_1) = \sin(2\theta_2) \end{cases}$ e questo si può verificare solo se $2\theta_1 = 2\theta_2 + 2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

ovvero $\theta_1 = \theta_2 + k\pi$, ma dato che $0 < \theta_i < \pi$ per $i=1,2$

si ha che $k=0$ e $\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow P_1 = P_2$.

~~(iii) $\iint_{\phi(C)} 1\, dx\,dy = \iint_C J_\phi(u,v)\, du\,dv = 4\iint_C (u^2+v^2)\,du\,dv$~~

(iii) Dato che $\phi : C \longrightarrow \phi(C)$ è iniettiva possiamo scrivere

$$\iint_{\phi(C)} 1 \, dx\,dy = \iint_C \left| J_\phi(u,v) \right| du\,dv = 4 \iint_C (u^2+v^2)\, du\,dv$$

chiamando $t = v-2$ questo integrale diventa

$$4 \iint_{u^2+t^2 \leq 1} \left(u^2 + t^2 + 4t + 4 \right) du\,dt = 4 \iint_{u^2+t^2\leq 1} (u^2+t^2)\, du\,dt + \overset{0}{\boxed{16 \iint_{u^2+t^2\leq 1} t \, du\,dt}} + 16\pi$$

$$= 18\pi$$

Es2 - 5

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^4$$

(i) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 4y^3 \end{pmatrix}$

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = 2x \\ -x + 4y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ x(32x^2 - 1) = 0 \end{cases}$ da cui

$$\underbrace{\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}}_{P_0} \vee \underbrace{\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{32}} \\ y = \frac{2}{\sqrt{32}} \end{cases}}_{P_1} \vee \underbrace{\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{32}} \\ y = -\frac{2}{\sqrt{32}} \end{cases}}_{P_2}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ È una matrice con autovalori di segno opposto, $(0,0)$ pto di sella

$H_f(P_1) = H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ È una matrice con due autovalori positivi, ergo P_1 & P_2 sono due minimi locali.

(ii) $\lim_{x \to +\infty} f(x,0) = \lim_{x \to \infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y) = +\infty$

In effetti $f(x,y) = \left(\frac{x}{2} - y\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + y^4 \geq \frac{3}{4}x^2 + y^4$

e da ciò segue $\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x,y) = +\infty$

pertanto f ammette minimo globale, e questo può essere raggiunto solo in P_1 o P_2. In effetti

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = f(P_1) = f(P_2) = -\frac{1}{64} .$$

(iii) Q è un insieme compatto $\Rightarrow$ f ammette massimo e minimo su Q. Il minimo di $f|_Q$ coincide col minimo globale:

$$\min_{(x,y)\in Q} f(x,y) = f(P_1) = -\frac{1}{64} \qquad (P_1 \in Q)$$

Il massimo sarà raggiunto su ∂Q (dato che P_1 è l'unico pto stazionario <u>INTERNO</u> a Q).

Esaminando

$$\begin{cases} f(x,0) = x^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ f(x,5) = x^2 - 5x + 625 & " \end{cases} \qquad \begin{cases} f(0,y) = y^4 & 0 \leq y \leq 5 \\ f(2,y) = 4 - 2y + y^4 & 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

Si scopre che il massimo è raggiunto in

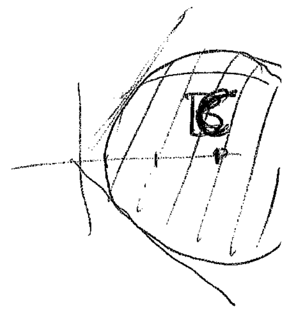
$P_3 = (0,5)$ e $\max_{(x,y)\in Q} f(x,y) = f(0,5) = 625$.

$\boxed{\text{Es 3-3}}$ (i) $J_\phi(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$ $\quad \det\left(J_\phi(x,y)\right) = 4(x^2+y^2)$

$J_\phi(x,y)$ è invertibile $\forall (x,y) \neq 0 \Rightarrow \phi$ è loc. invertibile ~~su~~ in ogni punto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(ii) $\phi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = (\rho^2\cos 2\theta, \rho^2 \sin 2\theta)$

Se $P_1, P_2 \in C \Rightarrow \begin{cases} P_i = (\rho_i \cos\theta_i, \rho_i \sin\theta_i) \\ \text{con} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_i < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\quad i=1,2$



Quindi se $\phi(P_1) = \phi(P_2)$

otteniamo che $\rho_1^2 = \rho_2^2$ et

$$\begin{cases} \cos(2\theta_1) = \cos(2\theta_2) \\ \sin(2\theta_1) = \sin(2\theta_2) \end{cases}$$

Questa condizione è verificata se e solo se

$2\theta_1 = 2\theta_2 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ da cui

$\theta_1 = \theta_2 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

ma dato che $|\theta_1 - \theta_2| < \pi$, k deve essere zero $\Rightarrow \theta_1 = \theta_2$

(iii) Dato che $\phi : C \to \phi(C)$ è iniettiva si ha

$$\iint_{\phi(C)} 1 \, dx\,dy = \iint_C J_\phi(u,v)\,du\,dv = 4\iint_C (u^2+v^2)\,du\,dv$$

chiamando $t = u-3$ questo integrale diventa

$$4\iint_{t^2+v^2\le 4} (t^2+v^2+6t+9)\,dt\,dv = 176\pi$$