Esercizio 1. (A)

(i) Come è noto

$$f(x,y) = \begin{cases} y - 2\cos x & \text{se } (x,y) \in Q \text{ e } y \geq 2\cos x \\ 2\cos x - y & \text{se } (x,y) \in Q \text{ e } y < 2\cos x \end{cases}$$

Se $y \neq 2\cos x$, $(x,y) \in Q$ si ha inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2\sin x & \text{se } y > 2\cos x \\ -2\sin x & \text{se } y < 2\cos x \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y > 2\cos x \\ -1 & \text{se } y < 2\cos x \end{cases}.$$

In tutti questi punti, pertanto, le derivate parziali di f esistono e sono continue. Se poi $y = 2\cos x$, $(x,y) \in Q$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 2\cos x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, 2\cos x_0) - f(x_0, 2\cos x_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 2\cos x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, 2\cos x_0 + h) - f(x_0, 2\cos x_0)}{h}.$$

Ma

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0, 2\cos x_0 + h) - f(x_0, 2\cos x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{2\cos x_0 + h - 2\cos x_0}{h} = 1 \qquad \text{e}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0, 2\cos x_0 + h) - f(x_0, 2\cos x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{2\cos x_0 - (2\cos x_0 + h)}{h} = -1$$

per $|x_0| < \pi/2$. Dunque in questi punti $\partial f/\partial y$ NON esiste. Analogamente, se $x_0 \neq 0$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h, 2\cos x_0) - f(x_0, 2\cos x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{2\cos x_0 - 2\cos(x_0+h)}{h} = 2\sin x_0 \quad e$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h, 2\cos x_0) - f(x_0, 2\cos x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{2\cos(x_0+h) - 2\cos x_0}{h} = -2\sin x_0$$

da cui, se $x_0 \neq 0$, $\partial f/\partial x$ NON esiste nei punti in questione. Invece

$$\partial f/\partial x\,(0,2) = \lim_{h \to 0} \frac{2 - 2\cosh}{h} = 0$$

esiste.

(ii) Per quanto appena visto, f è differenziabile nei punti $(x,y) \in Q$ per cui $y \neq 2\cos x$, (in virtù del teorema del differenziale totale), ma NON ~~nei~~ punti $(x,y) \in Q$ tali che $y = 2\cos x$, mancando in questi ultimi almeno una delle due derivate parziali.

(iii) Per quanto mostrato in (i), $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ $\forall (x,y) \in Q$ tale che $y \neq 2\cos x$. Se invece $y = 2\cos x$ è $f(x,y) = 0$ mentre, ovviamente, si ha $f(x,y) > 0$ altrove.

Dunque

$$\inf_Q f = \min_Q f = 0.$$

Poiché poi

$$|3 - 2\cos x| \leq 3 \quad \text{e} \quad |-1 - 2\cos x| \leq 3$$
$$\forall x : \ |x| \leq \pi/2$$

e

$$|y - 2\cos(\pm \pi/2)| \leq 3$$

se $-1 \leq y \leq 3$, si ha

$$\max_{\partial Q} |y - 2\cos x| = 3$$

da cui

$$\sup_Q f = 3$$

Esercizio 1 (B)

(i)

$$f(x,y)=\begin{cases} 2y-\sin x & \text{se } (x,y)\in Q \text{ e } y\geq \frac{1}{2}\sin x \\ \sin x-2y & \text{se } (x,y)\in Q \text{ e } y<\frac{1}{2}\sin x \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} -\cos x & \text{se } y>\frac{1}{2}\sin x \\ \cos x & \text{se } y<\frac{1}{2}\sin x \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} 2 & \text{se } y>\frac{1}{2}\sin x \\ -2 & \text{se } y<\frac{1}{2}\sin x \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\tfrac{1}{2}\sin x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,\frac{1}{2}\sin x_0)-f(x_0,\frac{1}{2}\sin x_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\tfrac{1}{2}\sin x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,\frac{1}{2}\sin x_0+h)-f(x_0,\frac{1}{2}\sin x_0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0,\frac{1}{2}\sin x_0+h)-f(x_0,\frac{1}{2}\sin x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin x_0+2h-\sin x_0}{h}=2$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0,\frac{1}{2}\sin x_0+h)-f(x_0,\frac{1}{2}\sin x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x_0-2(\frac{1}{2}\sin x_0+h)}{h}=-2$$

se $x_0\in]0,\pi[$. Dunque $\partial f/\partial y$ NON esiste nei punti di Q tali che $y=\frac{1}{2}\sin x$. Analogamente

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h, \frac{1}{2}\sin x_0) - f(x_0, \frac{1}{2}\sin x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sin x_0 - \sin(x_0+h)}{h} = -\cos x_0$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h, \frac{1}{2}\sin x_0) - f(x_0, \frac{1}{2}\sin x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \cos x_0$$

se $x_0 \neq \pi/2$. Invece

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi/2, \tfrac{1}{2}) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin \pi/2 - \sin(\pi/2+h)}{h} = 0$$

e pertanto esiste

(ii) f è differenziabile nei punti $(x,y)\in Q$ tali che $y \neq \frac{1}{2}\sin x$, ma NON lo è in quelli per cui $y = \frac{1}{2}\sin x$.

(iii) $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ $\forall (x,y)\in Q : y \neq \frac{1}{2}\sin x$.

Se $y = \frac{1}{2}\sin x$ $f(x,y) = 0$ e, comunque, $f(x,y) \geq 0$ $\forall (x,y) \in Q$. Quindi

$$\inf_Q f = \min_Q f = 0$$

Inoltre

$$|6-\sin x|\le 6\ ,\quad |-2-\sin x|\le 3$$
$$\forall x:\ 0\le x\le \pi$$
e
$$|2y-\sin\pi| = |2y-\sin 0| = |2y|\le 6$$
se
$$-1\le y\le 3.$$
Dunque
$$\max_{\partial Q} |2y-\sin x| = 6$$
da cui
$$\sup_{Q} f = 6.$$

Esercizio 3. (A)

(i) Il campo $\underline{F}$ è piano e di classe C^1.
Calcoliamone il rotore
$$\operatorname{rot}\underline{F}(x,y) = \left(0,0,\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\right) =$$
$$= (0,0,-2)\neq(0,0,0).$$
Pertanto $\underline{F}$, non essendo irrotazionale, NON è conservativo.

(ii) Possiamo utilizzare il teorema di Gauss-Green applicato a $\underline{F}$ nel dominio B, un cerchio di centro $(\frac12,\frac12)$ e raggio $1/\sqrt{2}$.

Tenendo conto del punto (i), si ha

$$\oint_{\partial B^+} \underline{F}\, ds = \iint_B \left(\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y\right) dx\,dy =$$

$$= -2\iint_B dx\,dy = -2\,m(B) = -2\,\frac{\pi}{2} = -\pi.$$

Esercizio 3. (B)

(i) Il rotore del campo $\underline{F}$ (piano, di classe C^1) è

$$\operatorname{rot}\underline{F}(x,y) = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\right) =$$

$$= (0,0,-2) \neq (0,0,0).$$

Non essendo irrotazionale, $\underline{F}$ NON è conservativo.

(ii) B è un cerchio di centro $(-1,-1)$ e raggio $\sqrt{2}$. Possiamo pertanto applicare il teorema di Gauss-Green, usando il punto (i). Si ha

$$\oint_{\partial B^+} \underline{F}\, ds = \iint_B \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= -2\iint_B dx\,dy = -2\,m(B) = -2(2\pi) = -4\pi.$$