PROVA SCRITTA DEL 28/6/2010

ESERCIZIO 3

a) La funzione

$$\frac{\lg(1+x)}{x^2} \quad \text{è continua in } [1, +\infty),$$

quindi integrabile su $[1, b]$ $\forall\, b > 1$.

Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\lg(1+x)}{x^2} \cdot x^{3/2} = 0,$$

perciò, essendo $\frac{1}{x^{3/2}}$ integrabile su $(1, +\infty)$, anche

$\frac{\lg(1+x)}{x^2}$ lo è.

Calcoliamo ora l'integrale dato

$$\int \frac{\lg(1+x)}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\lg(1+x) + \int \frac{1}{x}\,\frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{x}\lg(1+x) + \lg\left(\frac{|x|}{|x+1|}\right) + c,$$

quindi

$$\int_1^b \frac{\lg(1+x)}{x}\,dx = -\frac{\lg(1+b)}{b} + \lg 2 + \lg\left(\frac{b}{b+1}\right) - \lg\frac{1}{2}$$

Ma $\frac{\lg(1+b)}{b} \xrightarrow[b \to +\infty]{} 0$; $\frac{b}{b+1} \xrightarrow[b \to +\infty]{} 1 \Rightarrow \lg\left(\frac{b}{b+1}\right) \to 0$.

Perciò $\int_1^{+\infty} \frac{\lg(1+x)}{x}\,dx = \lg 2 - \lg\frac{1}{2} = 2\lg 2$