Esercizio 1:

Si ricordi che $$\lim_{x\to 0} \frac{e-(1+x)^{1/x}}{x} = \frac{e}{2}$$

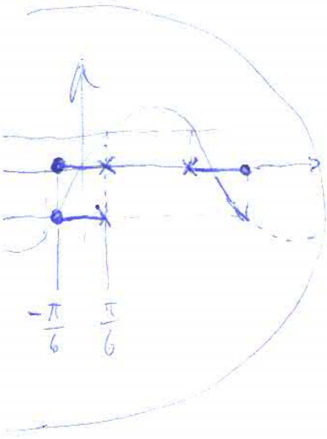
da cui $$e-(1+x)^{1/x} \sim \frac{e}{2}\cdot x \quad \text{per } x\to 0$$

Pertanto
$$\lim_{n\to\infty} n\log n\left[e-\left(1+\frac{1}{n\log n}\right)^{n\log n}\right] = \lim_{y\to\infty} y\left[e-\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left[e-(1+x)^{1/x}\right]}{x} = \underline{\underline{e/2}}$$

Analogamente
$$\left[e-\left(1+\frac{1}{n\log n}\right)^{n\log n}\right] \sim \frac{e}{2}\cdot\frac{1}{n\log n} \quad \text{per } n\to\infty$$

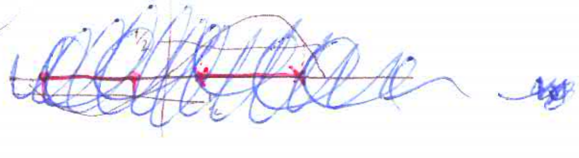
Pertanto se $|\sin x| < \frac{1}{2}$ la serie converge assolutamente

se $\sin x = \frac{1}{2}$ la serie diverge



se $\sin x = -\frac{1}{2}$ la serie converge per Leibnitz
(perché la funz. $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ è crescent)

se $|\sin x| > \frac{1}{2}$ la serie non converge perchè il termine generale non è infinitesimo.



Esercizio 2 :

(1) $$f'(x) = \frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2} > 0 \quad \forall x$$

Pertanto f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ e, di conseguenza, $f(x) > f(0) = 0 \quad \forall x > 0$.

(2) Si verifica facilmente che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Visto che f è continua, dal teorema dei valori intermedi segue che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è surgettiva; d'altra parte f è strettamente crescente e quindi anche iniettiva; visto che $f' > 0$ si ha che $g := f^{-1}$ è derivabile e $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(3) $$g'(0) = g'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

$$g''(f(x)) = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3} \qquad \text{pertanto}$$

$$g''(0) = g''(f(0)) = \frac{-f''(0)}{(f'(0))^3} = 0$$

$$\sin g(y) = \sin\left(\tfrac{1}{2}y + o(y^2)\right) = \tfrac{1}{2}y + o(y^2) \quad \text{per } y \to 0$$

$$g(\sin y) = \tfrac{1}{2}\sin y + o(\sin^2 y) = \tfrac{1}{2}y + o(y^2) \quad \text{per } y \to 0$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin(g(y)) - g(\sin y)}{y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{o(y^2)}{y^2} = 0$$

ESERCIZIO 3

(1) $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sin(nx)\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(nx)\right) dx = 0$$

Infatti

$\boxed{nx = y}$

$$\int_0^1 \sin(nx)\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(nx)\right) dx = \frac{1}{n}\int_0^n \sin y \left(\frac{\pi}{2} - \arctan y\right) dy$$

Posto $a_n := \int_0^n \sin y \left[\frac{\pi}{2} - \arctan y\right] dy$, integrando per parti si ottiene

$$a_n = \left[-\cos y \left(\frac{\pi}{2} - \arctan y\right)\right]_0^n - \int_0^n \frac{\cos y}{1+y^2}\, dy \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{2} - \boxed{\int_0^\infty \frac{\cos y}{1+y^2}\, dy}$$

assolut. convergen.

Pertanto $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$

(2) $$\lim_{n\to\infty} \boxed{e^{-n^2}\int_0^n \left[\log(n+x)\right]^n e^{-nx}\, dx} = 0 \,.$$ $\to I_n$ Infatti

$$0 \le \int_0^n \left[\log(n+x)\right]^n e^{-nx}\, dx \le \left[\log(2n)\right]^n \int_0^n e^{-nx}\, dx \le \left[\log(2n)\right]^n \cdot \frac{1}{n}$$

$$0 \le I_n \le e^{-n^2}\left[\log(2n)\right]^n \cdot \frac{1}{n} = \left[e^{-n}\log(2n)\right]^n \cdot \frac{1}{n}$$

$e^{-n}(\log 2n) \to 0$ per $n\to\infty$. A fortiori

$\left[e^{-n}(\log 2n)\right]^n \to 0$ per $n\to\infty$ e quindi

$I_n \to 0$ per il criterio dei due carabinieri.