Es 4

La serie è a termini positivi. Usiamo il criterio del rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)^{n+1}(n+1)!}\,\frac{n^n n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}\; n^n \cancel{n!}}{(n+1)^{n+1}(n+1)\cancel{n!}\;\cancel{(2n)!}} =$$

$$= \frac{2(2n+1)}{(n+1)}\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{4}{e} > 1$$ quindi la serie diverge.

In realtà bastava osservare che

$$a_n = \frac{(2n)!}{n^n\, n!} = \frac{(2n)}{n}\,\frac{(2n-1)}{n}\cdots\frac{(n+1)}{n}\,\frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}} > 1$$

quindi a_n non tende a 0, $\Rightarrow \sum a_n$ diverge.

Es 5 Osserviamo che, per $a \geq 0$ e $b \geq 0$, vale

$$ab \leq a^2 + b^2$$

Infatti, se $a \leq b$, $ab \leq bb \leq a^2+b^2$; analogo se $a \geq b$.

Quindi

$$\frac{a_n}{n^\alpha} \leq a_n^2 + \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

Ma $\sum a_n^2 < +\infty$ per ipotesi, $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}} < +\infty$ perché $\alpha > \frac{1}{2}$,

allora anche $\sum \frac{a_n}{n^\alpha} < +\infty$

Per $\alpha = 1/2$ il risultato è falso: prendiamo $a_n = \frac{1}{n \lg n}$

Per il criterio di condensazione di Cauchy

$$\sum \frac{1}{(\sqrt{n}\lg n)^2} = \sum \frac{1}{n \lg^2 n} < +\infty$$

mentre $$\sum \frac{1}{\sqrt{n}\lg n}\,\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n \lg n} = +\infty$$