

Università degli Studi di Pisa- Corso di laurea in Matematica  
PROVA SCRITTA di Elementi di Analisi Matematica

del 3 Settembre 2010

1) Sia  $\{a_n\}$  la successione definita per ricorrenza dalla legge

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \sqrt{a_n(a_n + 2)} \\ a_0 &= 1 \end{cases}$$

- (i) Dimostrare che la successione  $\{a_n\}$  è monotona.  
(ii) Calcolare i limiti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}.$$

(iii) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{a_n}$$

al variare di  $x \in \mathbb{R}$ .

2) Si consideri la funzione  $f(x) := \exp(x) - 1 - x \ln|x|$

- (i) Studiare le proprietà di continuità e derivabilità di  $f$ ; in particolare tracciarne un grafico approssimativo.  
(ii) Calcolare lo sviluppo di Taylor al quart'ordine di  $f$  nel punto  $x = 1$ .  
(iii) Discutere la validità delle seguenti affermazioni:

(a)  $\exp(x) \geq 1 + x \ln x \quad \forall x > 0$ ;

(b)  $f$  è Lipschitziana su  $[0, 1]$ .

3) (c) Dire se il seguente integrale improprio è convergente

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \ln x \, dx.$$

(d) Calcolare i seguenti integrali

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \, dx.$$