(10)* Dire se il risultato dell'esercizio (2) rimane vero sostituendo $\mathbb{Q}$ con un qualsiasi insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\overline{D} = \mathbb{R}$.

(11) Sia $f \in C([0,1])$. Calcolare $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n$

(12) Provare che le funzioni Beta e Gamma di Eulero definite da

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt \quad (x > 0) \qquad B(\lambda, \mu) := \int_0^1 t^{\lambda-1} (1-t)^{\mu-1}\, dt \quad (\lambda > 0,\ \mu > 0)$$

sono legate dalla seguente relazione

$$B(\lambda, \mu) = \frac{\Gamma(\lambda) \cdot \Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda + \mu)}$$

[Sugg: Posto $u_\lambda(t) := t^{\lambda-1} e^{-t} \chi_{\mathbb{R}_+}(t)$ verificare l'identità

$u_\lambda * u_\mu = B(\lambda, \mu) \cdot u_{\lambda+\mu}$. La tesi segue integrando ...]