ESERCIZI (Elenco riveduto & corretto)

(1) Sia $A \subseteq \mathbb{R}_+$, A misurabile e $|\mathbb{R}_+ \setminus A| = 0$.
Mostrare che $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$ $\exists\, a_1, a_2 \in A$ t.c. $x = a_1/a_2$

(2)* Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ misurabile, $|A| > 0$.
Mostrare che $|\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q})| = 0$.

(3) Sia $(X, \mathcal{Q}, \mu)$ spazio di misura con $\mu(X) = 1$.
Mostrare che $d(A,B) := \mu(A \triangle B)$ definisce una metrica completa sull'insieme quoziente $\mathcal{Q}/\sim$ dove $A \sim B \overset{def}{\Longleftrightarrow} \mu(A \triangle B) = 0$

(4) $(X, \mathcal{Q}, \mu)$ spazio di misura finito $(\mu(X) < +\infty)$.
Sia data una successione $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di insiemi tali che $A_k \in \mathcal{Q}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ e $\mu(A_k) \geq \alpha > 0$.
Allora $\tilde{A} := \{x \in X : \ x \in A_k \text{ frequentemente}\} \in \mathcal{Q}$ e $\mu(\tilde{A}) \geq \alpha$

(5) Sia $\varphi \in L^1(X, d\mu)$, $\varphi(x) > 0$ per μ-q.o. $x \in X$. Mostrare che
$$\int_A \varphi \, d\mu = 0 \implies \mu(A) = 0$$

(6) Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $Q := [0,1]^n$. Mostrare che se $\int_{Q+v} f(x)\,dx = 0$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$ allora $f(x) = 0$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$.

(7) Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni in $L^p(X, d\mu)$ $(1 \leq p < +\infty)$
Mostrare che
$$\left.\begin{array}{l} f_n \to f \text{ q.o.} \\ \|f_n\|_p \to \|f\|_p \end{array}\right\} \implies f_n \to f \ \text{ in } L^p(X, d\mu)$$

(8) Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $f(0) = 0$. Calcolare $\lim_{\rho \to 0} \rho^{-n-2} \int_{\{|x| \leq \rho\}} f(x)\,dx$

(9) Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ insiemi misurabili. Mostrare che se $\chi_A * \chi_B \equiv 0$ allora $|A| \cdot |B| = 0$