ANALISI FUNZIONALE

–10.6.2008–

1. Sia $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^p(\mathbf{R})$, con $1 < p < +\infty$.

   (a) Mostrare che $f \in L^r(\mathbf{R})$ per ogni $r \in [1, p]$ e vale la disuguaglianza

   $$\|f\|_r^r \leq \|f\|_1^\lambda \|f\|_p^{p(1-\lambda)} \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{p-r}{p-1}.$$

   (b) Sia $f_n \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^p(\mathbf{R})$ $(n \in \mathbb{N})$, mostrare che se f_n converge fortemente in L^1 e debolmente in L^p allora f_n converge fortemente in $L^r(X)$ per ogni $r \in [1, p[$.

2. Sia $f \in L^1([0,1])$ e $g(\lambda) := \int_0^1 f(x) e^{-\lambda x} dx$ $(\lambda > 0)$. Mostrare che se $g(\lambda) = 0$ per ogni $\lambda \in]a, b[$, $(0 < a < b)$ allora $f \equiv 0$ quasi ovunque.

3. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g(x) := \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(x+k)$. Mostrare che g é misurabile, é periodica e localmente integrabile. Provare inoltre che

   $$\int_0^1 g(x) e^{-2\pi i k x} dx = \hat{f}(2\pi k).$$

(3bis) Sia $f \in C([0,1])$ tale che $f \in AC([\epsilon, 1])$ $\forall \epsilon > 0$

   (a) Dire se, in generale, é vero che $f \in AC([0,1])$.

   (b) Assumendo che $f \in BV([0,1])$ dire se é vero che allora $f \in AC([0,1])$.