(2.b) ~~Verifichiamo che $\forall g \in G$ $\exists \gamma : [0,1] \to G$ t.c. $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = g$~~

Verifichiamo che $\forall g \in G$ $\exists \gamma \in C([0,1], G)$ t.c. $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = g$

Poniamo $\gamma_t := g \cdot \chi_{[0,t]}$; se $s < t$ si ha

$\| \gamma_t - \gamma_s \|_2 = \left(\int_0^1 |g|^2 \chi_{[s,t]} \, dx \right)^{1/2}$. Visto che $|g|^2 \in L^1([0,1])$ la continuità di γ_t è conseguenza dell'assoluta continuità dell'integrale.

(2.c) Si può far di meglio. $g \in L^2([0,1]; \mathbb{Z}) \Rightarrow g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \chi_{A_k}$ con $A_k := \{ x : g(x) = k \}$, $\|g\|_2^2 := \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |A_k| < +\infty$.

Se A è misurabile $\exists$ una mappa $\begin{array}{c} [0,1] \to \mathcal{M} \\ t \mapsto A(t) \end{array}$ crescente tale che $|A(t)| = t|A|$ e $A(1) = A$. Utilizzo ciò per $A = A_k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Posto $\gamma_t := \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \chi_{A_k(t)}$ si avrà per $t > s$

$$\gamma_t - \gamma_s = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \cdot (\chi_{A_k(t)} - \chi_{A_k(s)}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \chi_{A_k(t) \setminus A_k(s)}$$

$$\| \gamma_t - \gamma_s \|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |A_k(t) \setminus A_k(s)| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |A| (t-s)$$ da cui

$$\| \gamma_t - \gamma_s \|_2 \leq \|g\|_2 |t-s|^{1/2} \qquad \forall s,t \in [0,1]$$

[NB: la medesima dimostrazione prova la connessione di $L^2((X,\mu), \mathbb{Z})$ purchè μ sia una misura divisibile]

(3) $\chi_{A_n} \rightharpoonup \chi_A \Rightarrow \int \chi_{A_n} \varphi \to \int \chi_A \varphi \quad \forall \varphi \in L^\infty$.

Con $\varphi = \chi_{A^c}$ ottengo che $\int_0^1 \chi_{A_n} \chi_{A^c} = |A_n \setminus A| \to 0 = \int \chi_A \chi_{A^c}$

Con $\varphi = \chi_A$ ottengo $\int_0^1 \chi_{A_n} \chi_A = |A_n \cap A| \to |A| = \int \chi_A^2$

e quindi $|A \setminus A_n| = |A| - |A_n \cap A| \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$

Pertanto $\| \chi_{A_n} - \chi_A \|_1 = |A_n \setminus A| + |A \setminus A_n| \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$

[NB: Il risultato vale in generale in $L^1(X, \mu)$]