1 Esponenziale e logaritmo.

1.1 Risultati preliminari.

Lemma 1

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}\right). \tag{1}$$

Lemma 2 (Disuguaglianza di Bernoulli)

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$

per ogni $\alpha \geq -1$ *e per ogni* $n \in \mathbb{N}$

Teorema 1 (Disuguaglianza delle medie) *Per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *per ogni* n*–upla* $\{a_k\}_{1\leq k\leq n}$ *di numeri reali positivi è verificata la seguente disuguaglianza*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right). \tag{2}$$

La dimostrazione di lemmi è un facile; procediamo dunque alla dimostrazione della disuguaglianza delle medie.

Dimostrazione Lemma 1 Sia $\mathcal{P}(n)$ il predicato

"l'equazione $\prod_{k=1}^{n} a_k \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^n$ è verificata per ogni n–upla $\{a_k\}_{1\leq k\leq n}$ di numeri reali positivi."

Osserviamo innanzitutto che $\mathcal{P}(n)$ è banalmente vera se $n = 1$ mentre per $n = 2$ si verifica immediatamente che

$$a_1 a_2 = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 \tag{3}$$

Vorremmo procedere per induzione sul numero di elementi dell'n–upla, ovvero dimostrare che se $\mathcal{P}(n)$ è vera allora è vera anche $\mathcal{P}(n+1)$. Purtroppo questo passaggio non è semplice e richiede un piccolo trucco: dimostreremo infatti che

(i) $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(2n)$.

(ii) Se $\mathcal{P}(n)$ è vera allora $\mathcal{P}(m)$ è vera per ogni $m \leq n$.

Quindi per passare da n a $n+1$ procederemo nel modo seguente:

$$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(2n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

dove la prima implicazione è vera grazie a (i) e la seconda grazie a (ii) unitamente al fatto che $2n \geq n+1 \quad \forall n \geq 1$.

Per dimostrare (i) procediamo nella maniera seguente:

$$\prod_{k=1}^{2n} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\cdot\left(\prod_{k=1}^{n} a_{n+k}\right)$$

quindi supposta $\mathcal{P}(n)$ vera otteniamo

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\cdot\left(\prod_{k=1}^{n} a_{n+k}\right) \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^n \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{n+k}\right)^n = \left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{n+k}\right)\right]^n \tag{4}$$

ma, utilizzando la disuguaglianza (3) osserviamo che

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{n+k}\right) \le \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{n+k}\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} a_k\right]^2$$

e sostituendo l'espressione trovata al secondo membro dell'equazione (4) terminaimo la dimostrazione del punto (i).

Dimostriamo allora (ii): supponiamo che $\mathcal{P}(n)$ sia vera, dato $m \le n$ e data comunque una m-upla $\{a_k\}_{1\le k\le m}$ definiamo

$$\mu = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} a_k, \qquad b_k = \begin{cases} a_k & k \le m \\ \mu & k > m \end{cases} \tag{5}$$

Osservando che

$$\prod_{k=1}^{n} b_k = \mu^{n-m}\prod_{k=1}^{m} a_k,$$

$$\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k = \tfrac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k + (n-m)\mu\right) = \tfrac{1}{n}\left(m\mu + (n-m)\mu\right) = \mu$$

si verifica facilmente che applicando la disuguaglianza (2) all'n-upla $\{b_k\}_{1\le k\le n}$ si ottiene la disuguaglianza

$$\mu^{n-m}\prod_{k=1}^{m} a_k \le \mu^n$$

quindi o $a_k = 0 \ \ \forall k$ (nel qual caso non c'e' nulla da dimostrare) oppure $\mu > 0$ e dunque dividendo entrambi i membri per la quantità (positiva!) μ^{n-m} e ricordando la definizione di μ otteniamo la tesi. #

Esercizi:

1. Dimostrare il lemma 1.
2. Dimostrare il lemma 2. Dimostrare inoltre che la disuguaglianza non è vera in generale senza l'ipotesi $\alpha \ge -1$ e individuare nella dimostrazione i passaggi in cui tale ipotesi viene utilizzata.
3. Dimostrare che la disuguaglianza delle medie si riduce ad un uguaglianza se e solo se gli a_n sono tutti uguali.
4. Dimostrare la disuguaglianza tra media geometrica e media armonica, ovvero che se $\{b_k\}_{1\le k\le n}$ è una n–upla di numeri strettamente positivi allora

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}(1/b_k)} \le \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} b_k}.$$

[Suggerimento: porre $a_k = (1/b_k)$ e utilizzare la disuguaglianza (2).]

1.2 La funzione esponenziale in base naturale.

Sia $x \in \mathbb{R}$, consideriamo la successione di polinomi definita da

$$p_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{dove } \ n \in \mathbb{N} \ :$$

Poniamo $\exp(x) \stackrel{def}{=} \lim_{n\to+\infty} p_n(x)$. Al fine di studiare le proprietà della funzione $\exp(x)$ procederemo per piccoli passi successivi:

(a) *Per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *fissato la successione* $(p_n(x))_n$ *è crescente per* $n > -x$. *Pertanto*

$$\exp(x) = \lim_{n\to+\infty} p_n(x) = \sup\{p_n(x) :\ n > -x\}.$$

Infatti posto

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 + \frac{x}{n} & 1 \le k \le n \\ \\ 1 & k = n+1 \end{cases}$$

quindi, applicando la disuguaglianza delle medie agli $n+1$ numeri positivi α_k

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k\right)^{n+1} \ge \prod_{k=1}^{n+1}\alpha_k$$

cioè, sostituendo nella formula sopra l'espressione esplicita degli α_k ed elevando entrambi i membri a potenza $n+1$-esima otteniamo

$$p_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \ge \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = p_n(x)$$

(b) *Per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *fissato* p_n *è superiormente limitata. Pertanto* $\exp(x) < +\infty$ *per ogni* x.

Infatti si ha

$$p_n(x)\cdot p_n(-x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n$$

e dunque

$$0 < p_n(x)\cdot p_n(-x) < 1 \quad \forall\ n > |x| \tag{6}$$

ora, visto che $p_n(-x)$ è crescente, posto $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}\ :\ n > |x|\}$ avremo che

$$p_n(-x) \ge p_{n_0}(-x) \qquad\qquad \forall n \ge n_0$$

da cui, tenendo anche conto dell'equazione (6), si ottiene

$$p_n(x) \le \frac{1}{p_n(-x)} \le \frac{1}{p_{n_0}(-x)}. \tag{7}$$

da cui la tesi. Osserviamo che la disuguaglianza (7) implica che $\exp(x) \le \dfrac{1}{p_{n_0}(-x)}$.

(c) *Vale l'identità algebrica*

$$(1+\frac{y}{n})^n - (1+\frac{x}{n})^n = \frac{(y-x)}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1+\frac{y}{n})^k(1+\frac{x}{n})^{n-k-1}.$$

(d) *Se* $I =]-\infty, C]$ *allora*

$$|\exp(y) - \exp(x)| \le |y-x|\exp(C) \quad\ \ \forall x,\ y \in I,$$

ovvero exp *ha rapporti incrementali limitati.*

In effetti dalla disuguaglianza al punto (c) segue che, se $x \le y \le C$,

$$0 \le (1+\frac{y}{n})^n - (1+\frac{x}{n})^n \le \exp(C)(y-x) \quad \forall n > -x$$

da cui, passando al limite si ottiene $0 \le \exp(y) - \exp(x) \le (y-x)\exp(C)$. Il caso $y \le x \le C$ è simmetrico.

(e) *se $x \leq y$ allora,*
$$\exp(x)(y-x) \leq \exp(y) - \exp(x) \leq \exp(y)(y-x).$$
Pertanto exp *è una funzione strettamente crescente.*

Questa è un'altra conseguenza dirette del punto (c)

(f) Se $x_n \to x$ allora $(1 + \frac{x_n}{n})^n \to \exp(x)$. (Conseguenza di (c) ponendo $y = x_n$ e passando al limite.)

La funzione exp si chiama esponenziale in base naturale. La proposizione seguente recapitola le proprietà principali di exp e giustifica, oltre al nome, anche la notazione $\exp(x) = e^x$.

Proposizione 3 *La funzione* $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$ *è un omomorfismo strettamente crescente. Valgono infatti le seguenti proprietà*

1. $\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y) \qquad \forall x,\ y\ \in \mathbb{R}$. *In particolare* $\exp(0) = 1$, $\exp(-x) = [\exp(x)]^{-1}$.
2. $\exp(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.
3. $\exp(x) \geq 1 + x \forall x \in \mathbb{R}$.

Dim: Se $x, y\ \in\ \mathbb{R}$, si ha che
$$\begin{aligned} \exp(x) \cdot \exp(y) &= \lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{x}{n})^n \cdot \lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{y}{n})^n \\ &= \lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{x + y + xy/n}{n})^n = \exp(x+y) \end{aligned} \tag{8}$$
dove l'ultima uguaglianza segue da (e). Le altre proprietà seguono facilmente dalla definizione, dalla proprietà (1) o dalle osservazioni precedenti. #

Esercizi:

1. Dimostrare (per induzione) che
$$[\exp(x)]^n = \exp(nx) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$
2. Sia $\exp(1) := e$ (e è detta la costante di Nepero). Mostrare che $2 < e < 3$.
3. Mostrare che $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ è surgettivo cioé che per ogni $b > o$ l'equazione $e^x = b$ ha soluzione. [Sugg: provare che se $b \geq 1$ la successione $x_n = n(b^{1/n} - 1)$ è decrescente, inferiormente limitata e pertanto ammette un limite a che soddisfa l'equazione $e^a = b$.]
4. Calcolare
$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty. \tag{9}$$
5. Provare che per ogni $x,\ x' \in \mathbb{R}$ si ha $\exp(x) = \exp(x')(1 + x - x')$.
6. Mostrare che per ogni $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}$ e $t \in [0, 1]$ vale la disuguaglianza $\exp(tx_1 + (1-t)x_0) \leq t\exp(x_1) + (1-t)\exp(x_0)$ (ovvero la funzione esponenziale è convessa).
7. Mostrare che $\frac{1}{1+x} \leq \exp(x)$ per ogni $x < 1$.
8. Provare che
$$\frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \geq 1$$
9. funzioni iperboliche ?????

1.3 La funzione logaritmo.

Nella sezione precedente (esercizio 4) abbiamo dimostrato che la funzione esponenziale in base naturale è bigettiva se come codominio prendiamo la sua immagine $\mathbb{R}^+$. Quindi essa ammette un'inversa $\log : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ che viene chiamata funzione logaritmo e risulta essere un omomorfismo crescente da $(\mathbb{R}_+, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$. Valgono inoltre le seguenti proprietà

1. $\log(xy) = \log(x) + \log(y) \;\; \forall\ x,\ y \in \mathbb{R}_+$, in particolare $\log(1) = 0$ e $\log(x^{-1}) = -\log(x)$.
2. $\log(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$;
3. $\log(1 + x) \leq x \;\; \forall x > -1$.

Esercizi:

1. Mostrare che, se $x > 0$, $\sqrt[n]{x} = \exp(1/n \log x)$.
2. Mostrare che $\log(x) \leq \log(x_0) + \frac{1}{x_0}(x - x_0)$ per ogni $x,\ x_0 \ \in \mathbb{R}_+$.
3. Dimostrare che per $\forall\ |x| < 1$ vale la seguente stima
$$\frac{x}{1+x} \leq \log(1 + x) \leq x.$$
Dedurne che
$$\frac{1}{n+1} \leq \log(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
4. Utilizzare il risultato precedente per provare che
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \log(n + 1).$$
5. Mostrare che, se $0 < \delta \leq x < y$ allora
$$0 < \log y - \log x \leq \frac{y - x}{\delta}.$$
6. Dimostrare che il logaritmo è una funzione concava, ovvero
$$\log(tx + (1 - t)y) \geq t \log x + (1 - t) \log y \quad \forall\ t \in [0, 1] \;\; x, y > 0$$
7. Dimostrare la seguente disuguaglianza (disuguaglianza di Young)
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b, p, q > 0,\ : \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
[Suggerimento: sfruttare la concavità del logaritmo.]

1.4 L'esponenziale e il logaritmo in base qualunque.

1.5 La funzione esponenziale.

Sia $a > 0$ fissato, si consideri la seguente applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & a^n \end{array}$$

tale funzione manda $(\mathbf{Z}, +)$ in $(\mathbb{R}, \cdot)$, trasformando somme in prodotti

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad \forall\ x,\ y\ \in \mathbf{Z} \tag{10}$$

Se vogliamo **estendere** tale funzione a tutto $\mathbb{R}$ in modo che la proprietà (10) sia verificata $\forall\, x,\ y \in \mathbb{R}$ basta porre

$$\exp_a(x) \stackrel{def}{=} \exp(x\,\log a).$$

È facile verificare che se $p/q \in \mathbb{Q}$ allora $\exp_a(p/q) = \sqrt[q]{a^p}$ pertanto in genere si usa la notazione $\exp_a(x) = a^x$. Inoltre con tale definizione la proprietà (10) è verificata su tutto $\mathbb{R}$.

Osserviamo inoltre che, se $a \neq 1$, si ha

$$\log(\exp_a(x)) = x\log(a), \qquad \exp_a(\frac{\log x}{\log a}) = x$$

pertanto la funzione $x \mapsto \frac{\log x}{\log a}$ è l'inversa di $\exp_a$, viene chiamata il *logaritmo in base* a ed indicata col simbolo $\log_a(x)$, si noti che[1] $\log(x) = \log_e(x)$.

In effetti tutti i logaritmi differiscono unicamente per un fattore moltiplicativo:

$$\frac{\log_a x}{\log_b x} = \frac{\log b}{\log a} \qquad \forall\ a,\ b\ \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\},$$

pertanto, se non c'e' motivo particolare, utilizzeremo sempre il logaritmo in base naturale.

Esercizi: Dimostrare che

1. $(\log_a b)(\log_b a) = 1 \qquad \forall a,\ b\ > 0$
2. $\log_a b = (\log_c b)(\log_a c)$
3. Mostrare la formula (già ben nota nel caso x, y fossero interi) $(a^x)^y = a^{xy} \quad \forall\, x,\, y\ \in \mathbb{R}$
4. Le seguenti valutazioni del logaritmo sono numeri razionali; calcolarle senza l'ausilio della calcolatrice
$$\begin{array}{lll} \log_3 27 & \log_3(1/9) & \log_3(1/\sqrt{3}) \\ \log_8(\sqrt{2}/2) & \log_4 8 & \log_{\sqrt{2}} 64 \end{array}$$
5. Mostrare che se $n,\ m\ \in N^+$ e $m \leq \log_2 n < m+1$ allora l'espressione di n in base 2 ha $m+1$ cifre.
6. Dire, senza utilizzare la calcolatrice, quante cifre sono necessarie per esprimere il numero 2^{64} nell'usuale base 10.

[1] Il logaritmo in base naturale si indica talvolta anche con $\ln(x)$.