Primo appello del primo modulo di

ANALISI

–10.01.2006–

1. Sia $Z_n := \{z \in \mathbf{C} \ : \ z^n = 1\}$ e $f : Z_{80} \to Z_{80}$ definita da $f(z) = z^2$.

   (a) Al variare di $z \in Z_{80}$ determinare la cardinalità $|f^{-1}(\{z\})|$.

   (b) Determinare la cardinalità dell'insieme

   $$A := \{h \circ f \ : \ h : Z_{80} \to Z_{80}, \ h \text{ bigettiva}\}$$

   (c) Determinare la cardinalità dell'insieme

   $$B := \{f \circ h \ : \ h : Z_{80} \to Z_{80}, \ h \text{ bigettiva}\}$$

   (d) Determinare la cardinalità dell'insieme

   $$C := \{h^{-1} \circ f \circ h \ : \ h : Z_{80} \to Z_{80}, \ h \text{ bigettiva}\}$$

   Ordinare tali insiemi in base alla cardinalità.

2. Sia $f(x) := x^2 e^{-x}$.

   (a) Dire se f ammette massimo o minimo sull'intervallo $[1, +\infty[$.

   (b) Discutere, al variare di $t \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = t$.

   (c) Mostrare che esiste un unico valore t tale che l'equazione ha esattamente tre soluzioni $x_1 < x_2 < x_3$ con la proprietà che $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$. Si provi che in tal caso vale necessariamente la relazione $x_1 x_3 + x_2 = 0$

3. Dire se zero è punto di massimo o minimo locale per la funzione

   $$F(x) = \sin(\log(1 + x)) - \log(1 + \sin x).$$