Secondo modulo di Analisi Matematica (Prof. Majer)

Continuità uniforme. Le funzioni Lipschitziane sono uniformemente continue. La funzione x^2 non è uniformemente continua su $\mathbb{R}$. Una funzione è uniformemente continua se e solo se ammette un modulo di continuità. Teorema di Heine-Cantor. Somma superiore e inferiore alla Riemann per una funzione rispetto a una suddivisione. Integrale superiore e inferiore; proprietà. Funzioni integrabili secondo Riemann. Integrabilità delle funzioni continue e delle funzioni monotone. Le funzioni integrabili secondo Riemann sull'intervallo [a,b] sono uno spazio vettoriale di funzioni. Linearità dell'integrale e additività rispetto al dominio. Composizione con funzioni continue. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Primitive e funzioni integrali. Regola di integrazione per parti e per sostituzione. Esempio: integrale di $\sin(x)^n$ sul periodo. Prodotto di Wallis per pi greco. Formula asintotica per il coefficiente binomiale centrale. Formula di Stirling per $n!$. Applicazioni scelte del calcolo integrale: volume della palla euclidea in $\mathbb{R}^n$. Resto in forma integrale nello sviluppo di Taylor. Integrali impropri. Test integrale per la convergenza delle serie. Norme. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Teorema del valor medio per curve in $\mathbb{R}^n$. Lunghezza di una curva in $\mathbb{R}^n$ associata a una data norma. Caso delle curve di classe C^1: la formula integrale per la lunghezza. Insiemi trascurabili secondo Lebesgue e proprietà. Caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann (cenni) e conseguenze. Serie di potenze in campo complesso: centro e raggio di convergenza. Cambio di centro in una serie di potenze. Funzioni analitiche reali e complesse. Derivabilità delle funzioni analitiche. Connessione. Teorema degli zeri isolati. Somma, prodotto e composizione di funzioni analitiche. Limite sotto il segno di integrale. Integrazione per serie. Formula di Cauchy per i coefficienti dello sviluppo in serie di una funzione analitica. Stima dei coefficienti e del raggio di convergenza. Applicazioni: serie generatrici. I numeri di Catalan. Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti. Spazio delle soluzioni. Nucleo e immagine di un operatore $P(D)$ con P in $\mathbb{C}[z]$. Proprietà asintotiche delle soluzioni di $P(D)u = 0$ in termini delle radici di P. L'equazione non omogenea $P(D)u = f$. Il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Stime asintotiche per i coefficienti di serie di potenze. Derivazione della formula di Stirling dalla formula di Cauchy applicata a $\exp(z)$. Problema del "cambio della moneta": serie generatrice e stime di Shur sui coefficienti. Funzione Gamma e funzione fattoriale $x!$. L'equazione funzionale $f(x) = f(x-1) + 1/x$. Caratterizzazione di E.Artin per la Gamma. Formule: prodotto infinito di Weierstrass, limite di Gauss, integrale di Eulero. Formula di riflessione di Eulero. Integrale di Eulero per la funzione Gamma. Alcune formule asintotiche legate alla funzione Gamma. Formula di Stirling nel caso continuo. La funzione Beta di Eulero. Sua espressione in termini della funzione Gamma. Formula di moltiplicazione di Gauss per la funzione Gamma.

Serie di Fourier. Teorema di convergenza di Fejer. I polinomi trigonometrici sono densi per la norma uniforme nelle funzioni continue e 2π-periodiche. Condizioni sufficienti per la convergenza uniforme delle serie di Fourier. Disuguaglianza di Bessel. Uguaglianza di Parseval.

Polinomi di Bernstein. Densità uniforme dei polinomi nelle funzioni continue. Se f è una funzione di classe C^k i suoi polinomi di Bernstein convergono uniformemente a f assieme alle derivate fino alla k-sima.