Terzo modulo di ANALISI
Prima prova intermedia
11.11.2004

1. Si consideri la successione di funzioni

$$f_k(t) = \frac{t^k}{k!} e^{-t}$$

   (a) Mostrare che f_k converge uniformemente in $[0, +\infty[$.

   (b) Studiare la convergenza della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$, in particolare dire se sono vere o false le seguenti proposizioni:

   $\sum f_k$ `converge uniformemente su` $[0, 1]$.
   $\sum f_k$ `converge uniformemente su` $[0, +\infty[$.
   $\sum f_k$ `converge normalmente su` $[0, +\infty[$.

2. Sia $\lambda \in [0, 1]$. Si consideri il problema di trovare una funzione che soddisfi le seguenti condizioni

$$u'(t) = u(\lambda t), \qquad u(0) = 1 \qquad (*)$$

   (a) Determinare una contrazione $\Phi : C^0([0, 1/2], \mathbb{R}) \to C^0([0, 1/2], \mathbb{R})$ con la proprietà che

$$\Phi(u) = u \iff u \text{ soddisfa } (*).$$

   (b) Mostrare che esiste una unica $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ che soddisfa $(*)$. Mostrare che u ammette uno sviluppo in serie di potenze convergente per ogni $t \in \mathbb{R}$ e calcolarlo.

3. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^2 - 4x - y^2 + 1 \\ 6xy - 3y \end{pmatrix}$$

   (a) Calcolare la matrice jacobiana $J_F(x, y)$ e dire per quali $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ essa risulta invertibile.

   (b) Verificare che F è invertibile fra un intorno U di $(0, 0)$ ed un intorno V di $(1, 0)$. Detta $G : V \to U$ l'inversa di $F_{|_U}$, calcolare la matrice jacobiana $J_G(1, 0)$ di G.

Nota: la formula di Stirling è $n! = \sqrt{2\pi}\ n^{n+1/2}\ e^{-n}\ (1 + o(1)), \quad n \to +\infty.$