ANALISI I

–28.06.2004–

1. (a) Si dica quanti sono i poligoni convessi (non degeneri) che si possono costruire usando i vertici di un ottagono regolare.

   `I poligoni convessi di cui sopra sono tanti quanti i sottoinsiemi di un sottoinsieme di 8 elementi che contengono almeno 3 elementi.`

$$\sum_{k=3}^{8} \binom{8}{k} = 219$$

   (b) Si dica quanti sono tutte le spezzate chiuse che si possono costruire usando i vertici di un ottagono regolare.

   `Si osservi che, fissati` k `punti, le spezzate ciuse che si possono formare usando` **`tutti`** `questi punti sono` $(1/2)(k-1)!$, `pertanto il numero cercato e'`

$$\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{8} \binom{8}{k}(k-1)! = 8018.$$

2. Si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{\log(n+1)}{\log n}\right]^n.$$

`Osserviamo che`

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} = 1 + \frac{\log(1+1/n)}{\log n} = 1 + \frac{o(1)}{n}.$$

`Pertanto`

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{\log(n+1)}{\log n}\right]^n = \lim_{n\to+\infty} \left[1 + \frac{o(1)}{n}\right]^n = 1$$

3. Sia

$$f_n(x) := e^{-nx}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Si mostri che l'equazione $f_n(x) = x^2$ ammette una unica soluzione positiva.

$f_n(x) = x^2$ se e solo se $\phi_n(x) := e^{nx/2}x = 1$. Ma ϕ_n è continua, $\phi_n(0) = 0$ e $\phi_n(1) = e^{n/2} \geq 1$, quindi per il teorema degli zeri esiste $\alpha_n \in]0,1]$ tale che $\phi_n(\alpha_n) = 1$; dato che ϕ_n è strettamente crescente tale soluzione è unica.

(b) Detta α_n la soluzione positiva dell'equazione $f_n(x) = x^2$, si trovino stime per il valore di α_n che permettano di studiare la convergenza delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2.$$

Osserviamo che

$$\left.\begin{array}{l} \phi_n(1/n) = \sqrt{e}/n \leq 1 \\ \phi_n((2\log n)/n)) = 2\log n \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \alpha_n \leq \frac{2\log n}{n}$$

Quindi, per il criterio del confronto, la prima serie diverge a $+\infty$ mentre la seconda è convergente.

ANALISI II[1]

–07.06.2004–

1. Sia
$$w_n := \frac{n+i\lambda}{n-i\lambda}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   (a) Mostrare che w_n è limitata; determinare $\theta_n \in \mathbb{R}$ tale che $w_n = e^{i\theta_n}$

   `Osserviamo che`
$$n+i\lambda = \sqrt{n^2+\lambda^2}e^{i\arctan(\lambda/n)}, \qquad n-i\lambda = \sqrt{n^2+\lambda^2}e^{-i\arctan(\lambda/n)}$$
   `e pertanto`
$$w_n := \frac{n+i\lambda}{n-i\lambda} = e^{i2\arctan(\lambda/n)}.$$
   `Questo prova che` $|w_n| = 1$ `e quindi che` w_n `è limitata.`

   (b) Dire per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ la successione $(w_n)^{n^2}$ converge per $n \to +\infty$.

   `Ricordando che` $\arctan y = y + o(y^2)$ $(y \to 0)$ `otteniamo che`
$$n^2 \arctan(\lambda/n) = n\lambda + o(1) \;\; (n \to +\infty)$$
   `e quindi`
$$(w_n)^{n^2} = e^{2i(n\lambda+o(1))} = e^{2in\lambda}(1+o(1)).$$
   `È quindi evidente che` $(w_n)^{n^2}$ `converge` $\iff$ $e^{2in\lambda}$ `converge. Pertanto se` $\lambda \in \{k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\}$ `allora` $(w_n)^{n^2} \to 1$. `In caso contrario la successione` $(w_n)^{n^2}$ `non converge in quanto`
$$|e^{2i(n+1)\lambda} - e^{2in\lambda}| = |e^{2in\lambda}| \; |e^{2i\lambda}-1| = |e^{2i\lambda}-1| > 0.$$

2. Sia
$$\varphi_a(x) := \frac{(1+2x)^a - (1+x)^a}{x}, \qquad a > 0.$$

   (a) Calcolare $\lim_{x\to 0} \varphi_a(x)$.

[1]Per Analisi I+II si svolga l'intero compito di analisi II.

Detta $g_a(x) := (1+x)^a$, la funzione che si vuole studiare è il rapporto incrementale

$$\varphi_a(x) = \frac{g(2x) - g(x)}{x}.$$

Per il teorema di Lagrange esiste $\xi \in (x, 2x)$ tale che $\varphi_a(x) = g'_a(\xi)$; quando $x \to 0$ anche $\xi \to 0$ e dunque

$$\lim_{x\to 0} \varphi_a(x) = g'_a(0) = a$$

(b) Studiare la monotonia di $\varphi_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ precisando per quali a è crescente.

Osserviamo che se $a \geq 1$ allora g_a è convessa; pertanto, in tal caso, la funzione $\Delta(x,y) = \frac{g_a(x)-g_a(y)}{x-y}$ è crescente in entrambe le variabili, quindi anche φ_a è crescente.
Un argomento analogo mostra la decrescenza di φ_a nel caso $a \in (0,1)$.

3. Si trovino, usando il metodo della variazione delle costanti, tutte le soluzioni della equazione differenziale

$$u'' - u = \frac{1}{e^t + e^{-t}}.$$

Si mostri che ne esiste una ed una sola limitata su tutto $\mathbb{R}$.

Il polinomio caratteristico associato all'equazione $v''-v = 0$ è $P(x) = (x-1)(x+1)$ pertanto le funzioni $v_1(x) = e^x$ e $v_2(x) = e^{-x}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea. Applicando il metodo di variazione delle costanti per trovare una soluzione u del tipo $u(t) = c_1(t)v_1(t)+c_2(t)v_2(t)$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(t) \\ c'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{e^t+e^{-t}} \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema lineare otteniamo

$$c'_1(t) = \frac{e^{-t}}{2(e^t + e^{-t})}, \qquad c'_2(t) = -\frac{e^t}{2(e^t + e^{-t})}.$$

Integrando ricaviamo

$$c_1(t) = A - \frac{1}{4}\log(1 + e^{-2t}), \qquad c_2(t) = B - \frac{1}{4}\log(1 + e^{2t}).$$

$$u(t) = [A - \frac{1}{4}\log(1 + e^{-2t})]e^t + [B - \frac{1}{4}\log(1 + e^{2t})]e^{-t}.$$

Osserviamo che, se $A = B = 0$ la funzione u tende a zero per $|t| \to +\infty$ ed è pertanto anche limitata.Visto che, se A o B sono non nulli, $v(t) = Ae^t + Be^{-t}$ non è limitata, la scelta $A = B = 0$ è l'unica che corrisponde ad una soluzione limitata.