# ANALISI I

**–07.06.2004–**

1. Si dimostrino le formule

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari,} \\ 2^n (-1)^{n/2} & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$b_n := \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1} = \begin{cases} 0 & n \text{ pari,} \\ 2^n (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

`Definiamo`

$$A_m := \sum_{k \in Z} (-1)^k \binom{m}{2k}, \qquad B_m := \sum_{k \in Z} (-1)^k \binom{m}{2k+1}.$$

`Visto che, per definizione,` $\binom{m}{h} = 0$ `se` $h > m$ `o se` $h < 0$ `è chiaro che le somme scritte sopra sono somme finite e che` $a_n = A_{2n}$`,` $b_n = B_{2n}$`. Inoltre dalla proprietà` $\binom{m+1}{j} = \binom{m}{j} + \binom{m}{j-1}$ `segue`

$$A_{m+1} = \sum_{k \in Z} (-1)^k \left[ \binom{m}{2k} + \binom{m}{2k-1} \right] = \sum_{k \in Z} (-1)^k \binom{m}{2k} + \sum_{h \in Z} (-1)^{h+1} \binom{m}{2h+1} = A_m -$$

$$B_{m+1} = \sum_{k \in Z} (-1)^k \left[ \binom{m}{2k+1} + \binom{m}{2k} \right] = A_m + B_m$$

`Quindi` $A_m$, $B_m$ `soddisfano la ricorrenza`

$$\begin{cases} A_{m+1} = A_m - B_m \\ B_{m+1} = A_m + B_m \\ A_0 = 1 \\ B_0 = 0 \end{cases}$$

`Ponendo` $Z_m = A_m + \mathrm{i} B_m$ `possiamo scrivere la formula precedente come` $Z_{m+1} = (1+\mathrm{i}) Z_m$`,` $Z_0 = 1$`. Quindi è ora evidente che` $Z_m = (1+\mathrm{i})^m$ `e dunque` $a_n = A_{2n}$ `e` $b_n = B_{2n}$ `sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di` $(1+\mathrm{i})^{2n} = (2\mathrm{i})^n$ `e la tesi segue dalla formula del binomio di Newton.`

2. Si ordinino (se possibile) le seguenti successioni in modo che ciascuna sia un o-piccolo della precedente (per $n \to +\infty$).

$$a_n = \log(n!), \qquad b_n = \sqrt[n]{n!}, \qquad c_n = 3^{\log n}, \qquad d_n = \log(2^n + 3^n).$$

Conviene ricordare che $(n/3)^n < n! < n^n$ quindi $\log n! = O(n \log n)$; inoltre $c_n = 3^{\log n} = n^{\log 3}$ e $d_n \sim n \log 3$. Quindi $a_n < n \log n = o(c_n)$ (visto che $\log 3 > 1$); $b_n = O(n) = o(n \log n) = o(a_n)$; per lo stesso motivo anche $d_n = o(a_n)$. Le successioni $d_n$ e $b_n$ hanno entrambe crescita lineare e quindi non possono essere ordinate come richiesto; tuttavia $d_n - b_n \geq n(\log 3 - 1)$ tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$. L'ordine secondo la crescita asintotica è quindi: $c_n,\ a_n,\ d_n,\ b_n$.

3. Si consideri la successione definita da

$$a_n := \prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{1}{k}).$$

(a) Si dica se $a_n$ è limitata.

Visto che $0 < 1/k \leq 1 < \pi/2$ si avrà $0 < \cos(1/k) < 1 - 1/(2k^2)$. Quindi $a_n > 0$ e $a_n/a_{n-1} = \cos(1/n) < 1$ cioè $a_n$ è decrescente e dunque $0 < a_n \leq \cos(1)$ per ogni $n \geq 1$.

(b) Si trovi $C > 0$ tale che $a_n \geq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n = \cos(1) \prod_{k=2}^{n} \cos(\frac{1}{k}) \geq \cos(1) \prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2}) = \cos(1) \frac{n+1}{2n} \geq \frac{\cos(1)}{2} > 0.$$

# ANALISI II[1]

**–07.06.2004–**

1. Si consideri la funzione razionale
$$q(x) = \frac{9}{x^3 - 3x + 2}.$$
   (a) Trovare una primitiva $Q(x)$ di $q(x)$ tale che $Q(0) = 0$.

   Per far ciò si scompone $q(x)$ in elementi semplici: visto che$x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2)$ cercheremo una scomposizione del tipo $q(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$; risolvendo un semplice sistema lineare otteniamo che $a = -1,\ B = 3,\ C = 1$ cioè
$$q(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+2} \tag{1}$$
   quindi la soluzione cercata sarà $Q(x) = \log\frac{|x+2|}{|x-1|} + \frac{3}{1-x} + D$ dove, $D$ dovrà essere $D = -(3 + \log 2)$.

   (b) Calcolare i coefficenti $c_k$ dello sviluppo $q(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$.

   Utilizziamo lo sviluppo (1) e osserviamo che
$$\frac{1}{1-x} = \sum_0^{+\infty} x^k, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_0^{+\infty}(k+1)x^k, \qquad \frac{1}{2+x} = \sum_0^{+\infty}(-1)^k x^k/2^{k+1}$$
   quindi $c_k = 4 + 3k - \frac{1}{(-2)^{k+1}}$.

   Questo sviluppo converge per $|x| < 1$.

2. Sia
$$f(x) := \int_{\mathbb{R}} \cos(xt)e^{-t^2/2}\ dt.$$
   (a) Provare che, per ogni valore di $x$, l'integrale improprio è convergente e definisce una funzione continua.

   (b) Calcolare $f(0)$ (ricordando che $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$).

   L'integrale è convergente per il criterio dell'assoluta convergenza: $|\cos(xt)e^{-t^2/2}| \le e^{-t^2/2}$, e
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\ dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\ dt = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} s^{-1/2}e^{-s}\ ds = \sqrt{2}\Gamma(1/2)$$
   La continuità segue dalla lipschitzianità del coseno:
$$|f(x)-f(y)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |\cos(xt)-\cos(yt)|e^{-t^2/2}\ dt \le |x|\int_{-\infty}^{+\infty} |t|e^{-t^2/2}\ dt$$

[1] Per Analisi I+II si svolga l'intero compito di analisi II.

(c) Dimostrare che $f$ è derivabile.

Sia $\phi_t(x) := \cos(xt)$. Usando la formula di Taylor con resto di Lagrange otteniamo che

$$|\phi_t(x+h) - \phi_t(x) - \phi_t'(x)h| = |\phi_t''(\xi)|h^2 \leq t^2h^2.$$

Siamo quindi in grado di mostrare che $f_1(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_t'(x)e^{-t^2/2}\ dt$ è la derivata di $f$, infatti

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x) - f_1(x)h| &= |\int_{-\infty}^{+\infty} [\phi_t(x+h) - \phi_t(x) - \phi_t'(x)h]e^{-t^2/2}\ dt| \\ &\leq h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2}\ dt = O(h^2) \end{aligned}$$

(d) Mostrare che $f$ risolve una semplice equazione differenziale lineare; usare tale equazione per calcolare $f$.

Dal punto precedente $f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -t\sin(tx)e^{-t^2/2}\ dt = f'(x)$; integrando per parti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx)(-te^{-t^2/2})\ dt = -x\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2/2}\ dt$$

cioé $f' = -xf$, pertanto, usando formula risolutiva delle equazioni lineari del primo ordine, $f(x) = \sqrt{2\pi}e^{-x^2/2}$.

(e) Calcolare la miglior costante di Lipschitz per $f$.

La miglior costante di Lipschitz è

$$C = \sup\{|f'(x)|\ :\ x \in \mathbb{R}\} = \sqrt{2\pi/e}.$$