

## 21.5 Matrici simili[Non richiesto]

Le nozioni di matrice simile e classe di similitudine non sono state introdotte in classe, e non sono richieste. Vengono lasciate in queste dispense per completezza. Molto brevemente, due matrici sono simili se rappresentano lo stesso morfismo rispetto a basi diverse. La classe di similitudine di una matrice  $A$  (o morfismo  $L_A$ ) è data dall'insieme delle matrici simili ad  $A$ , quindi dalle matrici che rappresentano il morfismo  $L_A$  rispetto a tutte le basi possibili.

Matrici quadrate non singolari sono interpretabili come un cambio di base

**Definizione-Proposizione 21.40.** [MMM03] *L'insieme*

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = (\{M \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \det M \neq 0\}, \cdot)$$

dove  $\cdot$  è il prodotto di matrici è un gruppo con l'operazione di prodotto di matrici e si dice Gruppo lineare di ordine  $n$  su  $\mathbb{K}$

*Dimostrazione.* Lasciata per esercizio □

**Problema 21.41.** [MMM30] *Dato uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione finita  $n$  ed un endomorfismo  $T: V \rightarrow V$  di  $\mathbb{K}$ -spazi, vorremmo identificare una base  $\mathcal{B}$  di  $V$  tale che  $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$  sia il più semplice possibile, al limite, se possibile, diagonale.*

Vediamo di caratterizzare tutte le matrici associate a  $T: V \rightarrow V$  mediante una qualche base.

**Definizione 21.42.** [MMM04] *Due matrici quadrate  $A, B \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$  sono simili se esiste una matrice  $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$  tale che*

$$A = M^{-1} \cdot B \cdot M \Leftrightarrow M \cdot A = B \cdot M$$

*Indichiamo questa relazione come  $A \sim B$ .*

**Corollario 21.43.** [MMM09] *Date due matrici quadrate  $A \sim B$  ho che*

1.  $\det A = \det B$ .
2.  $\mathrm{rk} A = \mathrm{rk} B$ .
3.  $\dim \ker A = \dim \ker B$ .

**Esempio 21.44.** [MMM06]

1. *Le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = B$$

*non sono simili, perchè una è singolare mentre l'altra non lo è.*

2. *Le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = B$$

*non sono simili, perchè hanno rango diverso,  $\mathrm{rk} A = 3$ ,  $\mathrm{rk} B = 2$*

**Osservazione 21.45.** [MMM11] *Date due matrici  $A, B \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$  abbiamo che  $A \sim B$  se e solo se il sistema matriciale omogeneo (con  $n^2$  incognite scalari)*

$$A \cdot X = X \cdot B$$

*ammette una soluzione invertibile.*

Vediamo un esempio di questo metodo

**Esempio 21.46.** [MMM12] *Dire se*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

*Soluzione:* Cerchiamo una soluzione non singolare del sistema

$$A \cdot X = X \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2x - y + 3z & -7x + y + 3t \\ 3x - z - t & 3y - 7z + 2t \end{pmatrix} = 0_2$$

$$\begin{cases} -2x - y + 3z = 0 \\ -7x + y + 3t = 0 \\ 3x - z - t = 0 \\ 3y - 7z + 2t = 0 \end{cases}$$

```
M:=Mat([[ -2,-1,3,0],
        [-7,1,0,3],
        [3,0,-1,-1],
        [0,3,-7,2]]);
```

```
L:=RiduciScalaVerbose(M);
```

```
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=-2
```

```
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
```

```
----- [-2, -1, 3, 0]
      2^a-7/2*1^a [0, 9/2, -21/2, 3]
      3^a+3/2*1^a [0, -3/2, 7/2, -1]
      0 sotto pivot[0, 3, -7, 2]
```

```
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=9/2
```

```
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
```

```
----- [-2, -1, 3, 0]
----- [0, 9/2, -21/2, 3]
      3^a+1/3*2^a [0, 0, 0, 0]
      4^a-2/3*2^a [0, 0, 0, 0]
```

E questo ci dice che non abbiamo solo la soluzione nulla, che è inaccettabile.

```
Scala2DiagonaleVerbose(L);
```

```
Metto tutti i pivots a 1
```

```
      1^a*-1/2 [1, 1/2, -3/2, 0]
      2^a*+2/9 [0, 1, -7/3, 2/3]
----- [0, 0, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 0]
```

```
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
```

```
      1^a-1/2*2^a [1, 0, -1/3, -1/3]
----- [0, 1, -7/3, 2/3]
----- [0, 0, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 0]
```

Quindi una soluzione generica è

$$X = \begin{pmatrix} -1/3z - 1/3t & -7/3z + 2/3t \\ z & t \end{pmatrix} \quad \text{con } z, t \in \mathbb{K}$$

Se poniamo  $z = 3$ ,  $t = 0$  otteniamo la soluzione

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

che è non singolare, quindi  $A \sim B$  □

Notiamo che qui stiamo determinando se due matrici date sono simili, e questo si può determinare risolvendo un sistema lineare. Il problema di trovare tutte le matrici simili ad una matrice data è molto più difficile da risolvere

**Esempio 21.47.** [MMM15] *Determinare tutte la matrici simili alla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$$

*Soluzione:* Dobbiamo cercare tutte la matrici

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tali che esista

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$$

Ovvero, dobbiamo risolvere il sistema

$$A \cdot X = X \cdot B$$

rispetto alle variabili  $x, y, z, t, a, b, c, d$ , e la soluzione  $X$  deve essere non singolare.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -xa + x - yc + 3z & -xb - yd + y + 3t \\ 3x - za + 2z - tc & 3y - zb - td + 2t \end{pmatrix} = 0_2$$

$$\begin{cases} -xa + x - yc + 3z = 0 \\ -xb - yd + y + 3t = 0 \\ 3x - za + 2z - tc = 0 \\ 3y - zb - td + 2t = 0 \end{cases}$$

Proviamo a risolvere questo sistema di equazioni *polinomiali non lineari* usando tecniche non viste a lezione:

```
Use R:=Q[a,b,c,d,x,y,z,t],Lex;
I:=Ideal(
-xa + x - yc + 3z,
-xb - yd + y + 3t,
3x - za + 2z - tc,
3y - zb - td + 2t,
xy-zt-1,// Pongo det X=1
);
```

Provo a semplificare il sistema

```
ReducedGBasis(I);
[cy + 1/3czt^2 + 1/3ct - dx - 1/3dz^2t - 1/3dz - xzt + x + 1/3z^2t - 8/3z,
cz^2t^2 + czt - 9c + 9dx^2 - dz^3t - 10dz^2 - 18x^2+
- 3xz^2t - 3xz + z^3t + 10z^2, cx + 1/3cz^2t + 1/3cz - dx^3+
- 1/3dx^2z + dxz^2 + 2x^3 + 2/3x^2z - 2xz^2,
xy - zt - 1,
dxt - dyz - 2xt + yz - 3,
b + dy^2 - dt^2 - y^2 + 2t^2,
dy^2z - dzt^2 - dt - y^2z + 3y + 2zt^2 + 2t,
a + 1/9czt^3 + 1/9ct^2 - 1/9dz^2t^2 - 1/9dzt + d+
- 1/3xzt^2 - 1/3xt + 1/9z^2t^2 + 1/9zt - 3]
```

Con scarso successo. Provo a porre  $a=z=0$  per semplificare i conti, sapendo che non otterò tutte le matrici che cerco ma solo qualcuna:

```
I1:=Ideal(
-xa + x - yc + 3z,
-xb - yd + y + 3t,
3x - za + 2z - tc,
3y - zb - td + 2t,
xy-zt-1, // Pongo det X=1
a,z); // Pongo per semplificare i conti, arbitrariamente, a=z=0
Provo a semplificare il sistema
ReducedGBasis(I1);
[d - 3,
bc - 7,
a,
z,
t^2 - 9/7b,
y - 1/3t,
x - 1/3tc]
```

Quindi alcune delle matrici richieste sono, con  $b \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{7}{b} & 3 \end{pmatrix}$$

Ma non ho idea delle altre..... □

Vediamo che due matrici simili danno lo stesso morfismo *rispetto a basi diverse*. Ricordiamo che matrici diverse danno, rispetto *alla stessa base*, morfismi diversi.

**Proposizione 21.48.** [MMM08a] *Sia  $T: V \rightarrow V$  un endomorfismo di  $\mathbb{K}$ -spazi e  $\mathcal{B}$  una base di  $V$  con  $\dim V = n$ . Allora*

1. *Se  $\mathcal{B}'$  è una base di  $V$ , allora  $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \sim (M_T)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$*
2. *Se  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$  e  $A \sim (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ , allora esiste  $\mathcal{C}$  base di  $V$  tale che  $A = (M_T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ .*

*Dimostrazione.*

1. Basta notare che  $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} (M_T)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ , con  $(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{-1} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ .
2. Esiste per ipotesi  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  tale che

$$A = M^{-1} \cdot (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M$$

Sia  $\mathcal{B} = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ . I vettori  $L_M(\underline{v}_1), \dots, L_M(\underline{v}_n)$ , in coordinate  $\mathcal{B}$  formano una base  $\mathcal{C}$  di  $V$ , dato che  $L_M$  è un isomorfismo ( $M$  è non singolare) e manda quindi una base in una base. Le colonne di  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  sono date dai vettori di  $\mathcal{C}$  in coordinate  $\mathcal{B}$ , ovvero dai vettori  $L_M(\underline{v}_1), \dots, L_M(\underline{v}_n)$ . Quindi  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = M$  da cui  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = M^{-1}$  e quindi

$$\begin{aligned} A &= M^{-1} \cdot (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M \\ &= M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \\ &= (M_T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

□

**Definizione 21.49.** [MMM10] *Data una matrice quadrata  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ , la sua classe di similitudine è*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_A &= \{B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \exists M \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ tale che } A = M^{-1}BM\} \\ &= \{B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid A \sim B\} \end{aligned}$$

**Osservazione 21.50.** [MMA10] *Sia dato un endomorfismo  $T: V \rightarrow V$ , con  $\dim V$  finita. Usando la sola definizione, vedere se esiste e se possibile determinare una base  $\mathcal{B}$  tale che  $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$  sia diagonale non è banale. Rifrasando l'affermazione precedente, data  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$  non è banale vedere se esiste e se possibile determinare  $D \in \mathcal{O}_A$  diagonale*

## 21.6 Autovalori ed autovettori

**Definizione 21.51.** [MMM16] *Sia dato  $V$ , un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  ed un endomorfismo di  $\mathbb{K}$ -spazi  $T: V \rightarrow V$ . Allora*

1. *L'insieme  $\text{sp}(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists \underline{v} \in V \text{ tale che } T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}\} \subseteq \mathbb{K}$  l'insieme degli autovalori di  $T$ , è detto spettro di  $T$ .*
2. *Un vettore non nullo  $\underline{v} \in V$  è detto autovettore di  $T$  relativo all'autovalore  $\lambda \in \text{sp} T$  se  $T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$*
3. *Uno scalare  $\lambda \in \text{sp}(T)$  si dice autovalore associato all'autovettore  $\underline{v}$  se  $T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$ .*
4. *Se  $\lambda \in \text{sp} T$ , l'insieme  $V_{\lambda} = \{\underline{v} \in V \mid T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}\} \subseteq V$  è detto autospazio di  $T$ .*

**Osservazione 21.52.** [MMZ31] *Con abuso di notazione, tutte la terminologia associata ad una matrice  $A$  verrà usata associata al morfismo  $L_A$  associato ad  $A$ . Per esempio, diremo che  $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  è singolare se e solo se la matrice  $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$  è singolare, dove  $\mathcal{B}$  è una base di  $\mathbb{K}^n$ . Analogamente, un morfismo  $T: V \rightarrow V$  verrà detto singolare se e solo se  $\ker T \neq \{0\}$ . Etc. etc..*

**Osservazione 21.53.** [MMM31] *Con le notazioni della definizione precedente, se  $V = \mathbb{K}^n$*

1.  $T(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \Leftrightarrow T(\underline{v}) - \lambda \underline{v} = \underline{0} \Leftrightarrow (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot \underline{v} - \lambda I_n \cdot \underline{v} = \underline{0} \Leftrightarrow ((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n) \cdot \underline{v} = \underline{0}$

2.  $V_\lambda \underset{SSP}{\subseteq} V$ . Per il punto 1 abbiamo che

$$V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} = \{v \in V \mid ((M_T)_B^\mathcal{B} - \lambda I_n) \cdot v = \mathbf{0}\} = \ker \left( (M_T)_B^\mathcal{B} - \lambda I_n \right)$$

e questo abbiamo visto è un sottospazio di  $V$ .

3. Da quanto detto sopra,  $\lambda \in \text{sp}T$  se e solo se l'endomorfismo  $T - \lambda \text{id}_n$  è singolare. Abbiamo quindi  $V_0 = \ker T$ . Quindi 0 è autovalore se e solo se  $T$  è singolare (altrimenti l'unico elemento di  $\ker T$  sarebbe il vettore nullo, che non è associato ad un autovalore).

**Proposizione 21.54.** [MMM17]  $\mathcal{B} = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$  con  $n > 1$  una base di  $\mathbb{K}^n$  e  $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  un endomorfismo di  $\mathbb{K}$ -spazi. Allora

1. La funzione 
$$p_T: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$
  

$$\lambda \mapsto \det \left( (M_T)_B^\mathcal{B} - \lambda I_n \right)$$
 non dipende dalla base  $\mathcal{B}$ .

2.  $p_T(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr} (M_T)_B^\mathcal{B} \lambda^{n-1} + \dots + \det((M_T)_B^\mathcal{B}) \lambda^0 \in \mathbb{K}[\lambda]$

Ricordiamo che  $\text{tr}$ , la traccia di una matrice quadrata, è la somma degli elementi sulla diagonale della matrice stessa.

3.  $\lambda_0$  è un autovalore di  $T$  se e solo se  $p_T(\lambda_0) = 0$ .

*Dimostrazione.*

1. Supponiamo di avere una base  $\mathcal{C}$  rispetto a cui  $T$  è associato alla matrice  $(M_T)_C^\mathcal{C}$ . Vogliamo dimostrare

$$\det \left( (M_T)_C^\mathcal{C} - \lambda I_n \right) = \det \left( (M_T)_B^\mathcal{B} - \lambda I_n \right)$$

Abbiamo

$$(M_T)_C^\mathcal{C} = (M_B^\mathcal{C})^{-1} (M_T)_B^\mathcal{B} M_B^\mathcal{C}$$

da cui

$$\det \left( (M_T)_C^\mathcal{C} - \lambda I_n \right) = \det \left( (M_B^\mathcal{C})^{-1} (M_T)_B^\mathcal{B} M_B^\mathcal{C} - \lambda I_n \right)$$

$$\text{dato che } I_n = M_B^{\mathcal{C}^{-1}} M_B^\mathcal{C}$$

$$= \det \left( (M_B^\mathcal{C})^{-1} (M_T)_B^\mathcal{B} M_B^\mathcal{C} - \lambda M_B^{\mathcal{C}^{-1}} M_B^\mathcal{C} \right)$$

$$= \det \left( (M_B^\mathcal{C})^{-1} \left( (M_T)_B^\mathcal{B} - \lambda I_n \right) M_B^\mathcal{C} \right)$$

per Binet

$$= \det (M_B^\mathcal{C})^{-1} \det \left( (M_T)_B^\mathcal{B} - \lambda I_n \right) \det M_B^\mathcal{C}$$

$$\text{dato che } \det (M_B^\mathcal{C})^{-1} = \frac{1}{\det M_B^\mathcal{C}}$$

$$= \det \left( (M_T)_B^\mathcal{B} - \lambda I_n \right)$$

2. Basta valutare  $p_T(\lambda) = \det \left( (M_T)_B^\mathcal{B} - \lambda I_n \right)$  in zero per avere che il suo termine noto è  $\det M_B^\mathcal{B}$ .

Diamo un'idea informale del resto della dimostrazione e poi una dimostrazione formale per induzione.

Voglio dimostrare che  $p_T \in \mathbb{K}[\lambda]$ ,  $\deg p_T = n$ , il coefficiente direttivo di  $p_T$  è  $(-1)^n$  e il coefficiente di  $\lambda^{n-1}$  è  $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ . In classe non è stata svolta la dimostrazione dell'ultimo punto, sulla trasposta.

Che  $p_T \in \mathbb{K}[\lambda]$  è immediato perchè le operazioni che faccio per ottenerlo sono solo somme e prodotti di elementi  $\left( (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n \right)$  che stanno in  $\mathbb{K}[\lambda]$ .

Se sviluppo il determinante con Laplace, è evidente che ogni elemento della matrice compare una volta sola nel calcolo, e dato che la variabile  $\lambda$  compare esattamente in  $n$  elementi della matrice  $\left( (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n \right)$  ho che  $\deg p_T(\lambda) \leq n$ .

Dimostrazione per induzione su  $n$ .

- Passo base  $n = 2$ . Sia

$$(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= (-1)^2 \lambda^2 + (-1)^1 (\operatorname{tr} (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) \lambda + \det (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

□

- Passo induttivo  $n - 1 \Rightarrow n$

Vogliamo dimostrare che per ogni endomorfismo  $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  abbiamo

$$p_T(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr} (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \lambda^{n-1} + \dots$$

sapendo che per ogni endomorfismo  $T': \mathbb{K}^{n-1} \rightarrow \mathbb{K}^{n-1}$  abbiamo che

$$p_{T'}(\lambda) = (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} \operatorname{tr} (M_{T'})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \lambda^{n-2} + \dots$$

Abbiamo che

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

sviluppamo con Laplace per la prima colonna

$$= (a_{11} - \lambda) \det \begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} + \text{termini di grado al più } n - 2$$

dato che il resto è una combinazione lineare su  $\mathbb{K}$  di determinanti di matrici in cui  $\lambda$  compare esattamente  $n-2$  volte (non compare il termine di indice  $(1, 1)$  e per la colonna  $i$ -esima), l'elemento  $(i, i)$  della diagonale. Quindi questa combinazione lineare mi dà un polinomio in  $\lambda$  di grado al più  $n-2$ .

$$= (a_{11} - \lambda) \det(A - \lambda \cdot I_{n-1}) + \text{termini di grado al più } n-2$$

dove  $A = (M_{T'})_{\mathcal{B}}$  per un opportuno endomorfismo  $T': \mathbb{K}^{n-1} \rightarrow \mathbb{K}^{n-1}$

Per l'ipotesi induttiva,

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= (a_{11} - \lambda)[(-1)^{n-1} \lambda^{n-1} (a_{22} + \dots + a_{nn}) + \dots] + \dots \\ &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) \lambda^{n-1} + \dots \\ &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr} (M_T)_{\mathcal{B}} \lambda^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

ed il termine noto, per quanto detto precedentemente, è  $p_T(0) = \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$

3. Voglio dimostrare che  $\lambda_0$  è un autovettore di  $T$  se e solo se  $p_T(\lambda_0) = 0$ .

Lo scalare  $\lambda_0$  è un autovalore di  $T$  se e solo se il sistema

$$(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \underline{x} = \lambda_0 \underline{x}$$

ammette una soluzione non nulla, e questo accade se e solo se la matrice  $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda_0 I_n$  è singolare (per il Teorema di Rouchè-Capelli), ovvero se e solo se

$$\det \left( (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda_0 I_n \right) = p_T(\lambda_0) = 0$$

□

**Definizione 21.55.** [MMM22] Dato un endomorfismo di  $\mathbb{K}$ -spazi  $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  il polinomio

$$p_T(\lambda) = \det \left( (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n \right)$$

è detto polinomio caratteristico di  $T$ .

**Corollario 21.56.** [MMM21] Con le notazioni della proposizione precedente, notiamo immediatamente che

1. Dato che gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico, il numero degli autovalori di  $T$  è minore uguale al grado del polinomio caratteristico  $p_T$ , ovvero alla dimensione di  $V$ .
2. Il termine noto di  $p_T(\lambda)$  è il determinante di  $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ .

**Esempio 21.57.** [MMM23] Sia dato l'endomorfismo  $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  con matrice associata rispetto alla base canonica

$n = 2$

$$(M_T)_{E_2}^{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

allora  $p_T(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda$ , senza neppure calcolare il determinante, dato che i termini di grado 2, 1, 0 sono dati rispettivamente da  $(-1)^2$ ,  $\operatorname{tr} (M_T)_{E_2}^{E_2} = 1 + 1 = 2$  e  $\det (M_T)_{E_2}^{E_2} = 0$

$n = 3$

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

allora

$$p_T(x) = \det \left( (M_T)_{E_3}^{E_3} - \lambda I_3 \right) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 3 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda - 14$$

Come previsto, il coefficiente di testa è  $-1$ , il secondo è  $(-1)^2 \cdot 5$ , la traccia della matrice ed il termine noto è  $-14$ , il determinante della matrice.

$n = 4$

$$(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2 = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 13\lambda^2 - 12\lambda + 4 \end{aligned}$$

Come previsto, il coefficiente di testa è  $1$ , il secondo è  $(-1)^3 \cdot 6$ , l'opposto della traccia della matrice ed il termine noto è  $4$ , il determinante della matrice.

Notiamo che gli elementi sopra la diagonale sono irrilevanti per il calcolo del polinomio caratteristico.

$n = 4$

$$(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{allora } p_T(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 23\lambda^2 - 28\lambda + 12$$

**Osservazione 21.58.** Per calcolare il determinante della matrice  $A - \lambda I$  posso ridurre con Gauss la matrice  $A - \lambda I$ . **RIDURRE A CON GAUSS E POI CALCOLARE IL DETERMINANTE DI  $A - \lambda I$  È UN ERRORE GRAVE**

**Esempio 21.59.** [MMM70] Infatti

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ma

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 1 \quad \text{ma} \quad \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1$$

**Proposizione 21.60.** [MMM18] Sia  $T: V \rightarrow V$  un endomorfismo di  $\mathbb{K}$ -spazi e  $\mathcal{B}$  base di  $V$ . Allora  $\mathcal{B}$  è composta di autovettori se e solo se  $(M_T)_{\mathcal{B}}$  è diagonale.

*Dimostrazione.* Lasciata per esercizio. □

**Corollario 21.61** (Non richiesto). [MMM19] Sia  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ . Allora esiste una base di autovettori per  $L_A$  se e solo se  $A$  è simile ad una matrice diagonale se e solo se  $\mathcal{O}_A$  contiene almeno una matrice diagonale.

**Definizione 21.62.** [MMM20] Sia  $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  un endomorfismo di  $\mathbb{K}$ -spazi. Diciamo che  $T$  ha tutti gli autovalori in  $\mathbb{K}$  se  $p_T$  ha esattamente  $n$  radici in  $\mathbb{K}$  contate con la loro molteplicità.

**Esempio 21.63.** [MMA00] Il polinomio caratteristico dell'endomorfismo associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{è} \quad \det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & -1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

e non ha radici in  $\mathbb{R}$ .

## 21.7 Endomorfismi diagonalizzabili

Nel prosieguo di questa sezione, considereremo endomorfismo su un  $\mathbb{K}$ -spazio  $V$  di dimensione finita  $n$ , non necessariamente su  $\mathbb{K}^n$ . Il polinomio caratteristico si ottiene dopo trasportato la situazione in  $\mathbb{K}^n$  mediante un opportuno isomorfismo.

**Proposizione 21.64.** [MMM52] Sia  $T: V \rightarrow V$  un endomorfismo di  $\mathbb{K}$ -spazi e  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in V$  non nulli corrispondenti ad autovalori distinti  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . Allora  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  sono linearmente indipendenti.

*Dimostrazione.* Induzione su  $k$ .

- Base  $k = 1$  Ovvio.
- Passo induttivo: OK per  $k - 1$ , proviamo per  $k$ . Supponiamo che  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{k-1}$  siano linearmente indipendenti. Vogliamo provare che

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k = \underline{0} \Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{0}$$

Abbiamo quindi la relazione  $\boxed{\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k = \underline{0}}$

Applichiamo  $T$

$$T(\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k) = T(\underline{0}) = \underline{0}$$

$$\alpha_1 T(\underline{v}_1) + \dots + \alpha_k T(\underline{v}_k) = \underline{0}$$

dato che  $\underline{v}_i$  sono autovettori otteniamo la relazione

$$\boxed{\alpha_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k \underline{v}_k = \underline{0}}$$

Sfruttando la prima relazione

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k = \underline{0} \Leftrightarrow \alpha_k \underline{v}_k = -\alpha_1 \underline{v}_1 - \dots - \alpha_{k-1} \underline{v}_{k-1}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\alpha_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} \underline{v}_{k-1} + \lambda_k (-\alpha_1 \underline{v}_1 - \cdots - \alpha_{k-1} \underline{v}_{k-1}) &= \underline{0} \\ \alpha_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} \underline{v}_{k-1} - \alpha_1 \lambda_k \underline{v}_1 - \cdots - \alpha_{k-1} \lambda_k \underline{v}_{k-1} &= \underline{0} \\ \text{raccolgiamo i vettori } \underline{v}_i & \\ \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) \underline{v}_{k-1} &= \underline{0}\end{aligned}$$

e dato che  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{k-1}$  sono linearmente indipendenti per l'ipotesi induttiva, abbiamo che

$$\begin{aligned}\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) &= 0\end{aligned}$$

ma dato che gli autovalori  $\lambda_j$  sono tutti distinti per ipotesi, abbiamo per ogni  $i : 1 \dots k$   $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$  e quindi

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$$

Quindi ricordando  $\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k \underline{v}_k = \underline{0}$  abbiamo che  $\alpha_k \underline{v}_k = \underline{0} \Rightarrow \alpha_k = 0$  e dato che  $\underline{v}_k$  è un autovettore,  $\underline{v}_k \neq \underline{0}$  e quindi anche  $\alpha_k = 0$ . Abbiamo dimostrato che  $\underline{\alpha} = \underline{0}$  e quindi  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  sono linearmente indipendenti.

□

**Corollario 21.65.** [MMM53] *Con la notazione della proposizione precedente, se  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  appartengono ad autospazi distinti di  $T$ , allora*

$$\underline{v}_1 + \cdots + \underline{v}_k = \underline{0} \Rightarrow \underline{v}_1 = \cdots = \underline{v}_k = \underline{0}$$

*Dimostrazione.* Ricordiamo che l'unico elemento di un autospazio che non sia un autovettore è il vettore nullo. Supponiamo per assurdo che qualcuno dei vettori  $\underline{v}_i$  sia non nullo, e quindi autovettori associati ad autospazi distinti. Tra questi autovettori vi sarebbe una relazione di dipendenza lineare, il che è assurdo per la Proposizione 21.64 precedente. Quindi, tutti i vettori  $\underline{v}_i$  sono nulli. □

**Corollario 21.66.** [MMM54] *Sia  $T: V \rightarrow V$  un endomorfismo di  $\mathbb{K}$ -spazi. Se  $T$  ha  $n$  autovalori distinti, allora  $T$  è diagonalizzabile.*

*Dimostrazione.* Se ho  $n$  autovalori distinti, ho  $n$  autospazi distinti. Quindi prendendo un autovettore da ciascuno, ho  $n$  vettori indipendenti per la Proposizione 21.64. Questi autovettori formano una base di autovettori e quindi  $T$  è diagonalizzabile. □

**Definizione 21.67.** [MMM55] *Sia  $T: V \rightarrow V$  un endomorfismo di  $\mathbb{K}$ -spazi e  $\lambda_0 \in \text{sp}T$ . Allora*

1. *la molteplicità algebrica di  $\lambda_0$  è la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico  $p_T$ . La indicheremo con  $\text{ma}_{\lambda_0}$ .*
2. *La molteplicità geometrica di  $\lambda_0$  è  $\dim V_{\lambda_0}$ . La indicheremo con  $\text{mg}_{\lambda_0}$ .*

**Esempio 21.68.** [MMM56]  $L'$  endomorfismo  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  associato alla matrice

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ha polinomio caratteristico

$$p_T(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32$$

notiamo che  $p_T(2) = 0$ . Quindi  $(\lambda - 2) | p_T(\lambda)$  ed operando una divisione di polinomi otteniamo

$$p_T(\lambda) = (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 10\lambda - 16) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 16) = (2 - \lambda)^2(8 - \lambda)$$

fattorizzando il fattore di secondo grado con la formula.

Quindi la molteplicità algebrica di 2 è 2 e di 8 è 1. Abbiamo

- $\text{mg}_2 = 3 - \text{rk} \left( (M_T)_{E_3}^{E_3} - 2I_3 \right) = 3 - \text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$
- $\text{mg}_8 = 3 - \text{rk} \left( (M_T)_{E_3}^{E_3} - 8I_3 \right) = 3 - \text{rk} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$

Per esercizio, vedere che l'unione delle basi degli autospazi mi dà una base  $\mathcal{B}$  di  $V$  e quindi  $T$  è diagonalizzabile e  $(M_T)_{E_3}^{E_3}$  è simile, per esempio, alla matrice

$$(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

## 21.8 Criteri di diagonalizzabilità

**Proposizione 21.69.** [MMM57] La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità geometrica.

*Dimostrazione.* Sia  $T: V \rightarrow V$  un endomorfismo di  $\mathbb{K}$ -spazi,  $\dim V = n$  e  $\lambda_0 \in \text{sp } T$  con molteplicità geometrica  $\text{mg}_{\lambda_0}$ , che indicheremo con  $k$ . Sia  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  una base di  $V_{\lambda_0}$ ; completiamola a  $\mathcal{B} = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n$  base di  $V$ . Quindi

$$(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left( \begin{array}{c|c} \lambda_0 I_k & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

con  $0, B, C$  matrici opportune. Quindi

$$(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n = \left( \begin{array}{c|c} (\lambda_0 - \lambda) I_k & B \\ \hline 0 & C - \lambda I_d \end{array} \right)$$

con  $d = n - k$ . Questa è una matrice a blocchi e quindi

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det \left( (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n \right) = \det \left( (\lambda_0 - \lambda) I_k \right) \det(C - \lambda I_d) \\ &= (\lambda_0 - \lambda)^k p_C(\lambda) \end{aligned}$$

e dato che per definizione la molteplicità algebrica di  $\lambda_0$  è il massimo  $s$  per cui  $(\lambda_0 - \lambda)^s \mid p_T(\lambda)$ , e  $(\lambda_0 - \lambda)^k \mid p_T(\lambda)$  abbiamo che la molteplicità algebrica è maggiore od uguale a  $k = \text{mg}_{\lambda_0}$ .  $\square$

**Teorema 21.70** (Criterio di Diagonalizzabilità). [MMM58] Sia  $T: V \rightarrow V$  un endomorfismo di  $\mathbb{K}$ -spazi e  $\dim V = n$ . Se  $\text{sp } T = \{\lambda_1, \dots, \lambda_h\}$ , indichiamo con  $\text{ma}_{\lambda_i}$  e  $\text{mg}_{\lambda_i}$  le molteplicità geometriche ed algebriche di  $\lambda_i$  con  $i: 1 \dots h$ . Allora TFAE (i seguenti fatti sono equivalenti):

1.  $T$  è diagonalizzabile.
2. Ogni elemento di  $V$  si scrive come somma di autovettori di  $T$  relativi ad autovalori distinti.
3.  $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_h}$ .
4.  $T$  ha tutti gli autovalori in  $\mathbb{K}$  e  $\text{ma}_{\lambda_i} = \text{mg}_{\lambda_i}$  per  $i: 1 \dots h$  (per ogni autovalore la molteplicità geometrica ed algebrica coincidono).
5.  $\text{mg}_{\lambda_1} + \dots + \text{mg}_{\lambda_h} = n$ .

*Dimostrazione.*

1  $\Rightarrow$  2 Per ipotesi esiste  $\mathcal{B} = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$  base di  $V$  composta di autovettori, quindi per ogni vettore  $v \in V$  esiste  $\underline{\alpha} \in \mathbb{K}^n$  tale che

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i$$

se raggruppiamo i termini  $\lambda_i \underline{v}_i$  corrispondenti agli autovettori associati ad uno stesso autospazio abbiamo la tesi.

2  $\Rightarrow$  3 Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_h$  gli autovalori distinti di  $T$ . Per ipotesi abbiamo che per ogni  $\underline{v} \in V$  esistono  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_h$  con  $\underline{v}_i \in V_{\lambda_i}$  per  $i: 1, \dots, h$  tali che

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \dots + \underline{v}_h$$

Dobbiamo dimostrare che questa scrittura è unica (gli  $\underline{v}$  sono unici). Supponiamo che esistano  $\underline{v}'$  tali che

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 + \dots + \underline{v}_h &= \underline{v}'_1 + \dots + \underline{v}'_h \\ (\underline{v}_1 - \underline{v}'_1) + \dots + (\underline{v}_h - \underline{v}'_h) &= \underline{0} \end{aligned}$$

Ma dato che i  $\underline{v}_i, \underline{v}'_i$  appartengono allo stesso autospazio,  $V_{\lambda_i}$  abbiamo che  $\underline{v}_i - \underline{v}'_i \in V_{\lambda_i}$ . Dato che gli autospazi  $V_{\lambda_i}$  sono distinti, per il Corollario 21.65 abbiamo che  $\underline{v}_i - \underline{v}'_i = \underline{0}$  e quindi  $\underline{v} = \underline{v}'$  da cui la tesi.

3  $\Rightarrow$  4 So che  $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_h}$  e voglio dimostrare che tutte le radici di  $T$  sono in  $\mathbb{K}$  e

$$\forall i: 1, \dots, h \quad \text{ma}_{\lambda_i} = \text{mg}_{\lambda_i}$$

Abbiamo dall'ipotesi e dalla definizione di molteplicità geometrica

$$\dim V = n = \dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_h} = \text{mg}_{\lambda_1} + \dots + \text{mg}_{\lambda_h}$$

Dato che le ma sono le molteplicità algebriche delle radici di  $p_T(\lambda)$ , che ha grado  $n = \dim V$ , ho

$$\dim V = n \geq \text{ma}_{\lambda_1} + \dots + \text{ma}_{\lambda_h}$$

Dalla Proposizione 21.69 ho

$$\forall i: 1, \dots, h \quad \text{ma}_{\lambda_i} \geq \text{mg}_{\lambda_i}$$

Quindi

$$\text{ma}_{\lambda_1} + \dots + \text{ma}_{\lambda_h} \geq \text{mg}_{\lambda_1} + \dots + \text{mg}_{\lambda_h} = n \geq \text{ma}_{\lambda_1} + \dots + \text{ma}_{\lambda_h}$$

Quindi

$$ma_{\lambda_1} + \dots + ma_{\lambda_h} = mg_{\lambda_1} + \dots + mg_{\lambda_h} = n$$

Quindi tutte le radici di  $p_T(\lambda)$  stanno in  $\mathbb{K}$ . Ora,

$$ma_{\lambda_1} + \dots + ma_{\lambda_h} - (mg_{\lambda_1} + \dots + mg_{\lambda_h}) = 0$$

$$(ma_{\lambda_1} - mg_{\lambda_1}) + \dots + (ma_{\lambda_h} - mg_{\lambda_h}) = 0$$

$$\text{dato che } \forall i : 1, \dots, h \quad ma_{\lambda_i} - mg_{\lambda_i} \geq 0$$

$$\text{abbiamo } \forall i : 1, \dots, h \quad ma_{\lambda_i} - mg_{\lambda_i} = 0$$

4  $\Rightarrow$  5 Ho che  $T$  ha tutti gli autovalori in  $\mathbb{K}$  e  $\forall i : 1, \dots, h \quad ma_{\lambda_i} = mg_{\lambda_i}$ . Voglio dimostrare  $mg_{\lambda_1} + \dots + mg_{\lambda_h} = \dim V = n$

Per ipotesi

$$\sum_{i=1}^h mg_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^h ma_{\lambda_i}$$

$T$  ha tutti gli autovalori in  $\mathbb{K}$

$$= n$$

5  $\Rightarrow$  1 Ho  $\sum_{i=1}^h mg_{\lambda_i} = n$ . Voglio dimostrare che  $T$  è diagonalizzabile. Ricordiamo che  $T$  è diagonalizzabile se e solo esiste una base di  $V$  composta di autovettori di  $T$ .

Siano  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_h$  basi di  $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_h}$  rispettivamente. Per ipotesi, l'insieme

$$\underline{v} = \underline{v}_1 \cup \dots \cup \underline{v}_h$$

la nostra candidata base, contiene  $\dim V$  vettori. Ci basta dimostrare che questi vettori sono linearmente indipendenti. Usiamo la definizione di indipendenza lineare: abbiamo

$$\alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \dots + \alpha_h \cdot \underline{v}_h = \underline{0}$$

e vogliamo  $\alpha_1 = \dots = \alpha_h = \underline{0}$ .

Per ogni  $i : 1, \dots, h$  abbiamo che  $\alpha_i \underline{v}_i \in V_{\lambda_i}$ , e questi sono autospazi associati ad autovalori distinti quindi, per il Corollario 21.65,  $\alpha_i \cdot \underline{v}_i = \underline{0}$ . Ma dato che  $\underline{v}_i$  è base di  $V_{\lambda_i}$ , questo implica  $\alpha_i = \underline{0}$  e quindi la tesi.

□

## 21.9 Polinomio minimo

**Definizione 21.71.** [NNN01] Dato  $T : V \rightarrow V$  un endomorfismo di  $\mathbb{K}$ -spazi,  $\dim V = n$  e  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$  e

$$f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_1 \lambda^1 + a_0 \in \mathbb{K}[\lambda]$$

Allora

1. La valutazione di  $f$  in  $T$  è l'endomorfismo

$$f(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + a_1 T^1 + a_0 \text{id}_{V \rightarrow V}$$

2. La valutazione di  $f$  in  $A$  è la matrice

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + a_1 A^1 + a_0 I_n$$

**Esempio 21.72.** [NNN02] Dato l'endomorfismo di  $\mathbb{K}$ -spazi

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y) \end{aligned}$$

e  $f(\lambda) = x^2 - 3x - 2$  abbiamo che

$$\begin{aligned} T^2: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto T(T(x, y)) = T((x + y, x - y)) = (x + y + x - y, x + y - x + y) = (2x, 2y) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} f(T): \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (2x, 2y) - 3(x + y, x - y) - 2(x, y) = (-3x - 3y, -3x + 3y) \end{aligned}$$

Notiamo che

$$T(\underline{e}_1) = (1, 1) \quad e \quad T(\underline{e}_2) = (1, -1)$$

e quindi  $(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  Abbiamo

$$\begin{aligned} f((M_T)_{E_3}^{E_3}) &= (M_T)_{E_3}^{E_3^2} - 3 \cdot (M_T)_{E_3}^{E_3} - 2 \cdot I_2 \\ f((M_T)_{E_3}^{E_3}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ f((M_T)_{E_3}^{E_3}) &= \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Osservazione 21.73.** [NNN05] Dato  $T: V \rightarrow V$  un endomorfismo di  $\mathbb{K}$ -spazi con base  $\mathcal{B}$  e  $f(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ .

$$(M_{f(T)})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = f\left((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)$$

*Dimostrazione.* Lasciata per esercizio. □

**Definizione-Proposizione 21.74.** [NNN06] Data  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$  e l'endomorfismo  $T = L_A$ . Prendiamo in considerazione l'insieme

$$I_A = \{f \in \mathbb{K}[\lambda] \mid f(A) = \underline{0}\}$$

Abbiamo che

1. Teorema di Cayley-Hamilton: il polinomio caratteristico di  $p_{L_A}$  appartiene all'insieme  $I_A$ . Questo significa che

$$p_{L_A}(A) = 0$$

2. Esiste  $PM_A(\lambda) \in I_A$  monico, di grado minimo positivo tra gli elementi di  $I_A$  detto polinomio minimo di  $A$  (o di  $L_A$ ),  $PM_A$ , (o  $PM_{L_A}$ ) che divide tutti gli elementi di  $I_A$ .

3. Data una fattorizzazione in irriducibili del polinomio caratteristico di  $L_A$

$$p_{L_A}(\lambda) = \sum_{i=1}^k f_i(\lambda)^{\alpha_i} \quad \alpha_i \geq 1, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_k = n$$

allora una fattorizzazione in irriducibili del polinomio minimo di  $L_A$  rispetta la condizione

$$PM_{L_A}(\lambda) = \sum_{i=1}^k f_i(\lambda)^{\beta_i} \quad 1 \leq \beta_i \leq \alpha_i$$

Rifrasando il punto precedente, il polinomio minimo divide  $p_T(\lambda)$  ed è diviso da  $\text{sqfr}(p_T(\lambda))$ .

4. Quindi il polinomio minimo di  $L_A$  divide il polinomio caratteristico di  $L_A$ , ha le stesse radici ma con molteplicità minore od uguale e quindi il suo grado è compreso tra 1 e  $n$ .

5. Se  $T: V \rightarrow V$  è un endomorfismo di  $\mathbb{K}$ -spazio con  $\dim V = n$ , con base  $\mathcal{B}$  il polinomio minimo di  $T$  è  $PM_T(\lambda)$  e non dipende dalla base.

**Teorema 21.75** (Criterio di Diagonalizzabilità mediante il polinomio minimo). [NNN08] Sia  $T: V \rightarrow V$  un endomorfismo di  $\mathbb{K}$ -spazi. Allora  $T$  è diagonalizzabile se e solo se  $PM_T$  ha tutte le radici in  $\mathbb{K}$  e non ha radici multiple.

**Esercizio 21.76.** [NNN10] Calcolare polinomio caratteristico e minimo delle tre matrici in  $\text{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dato che le matrici sono tutte triangolari superiori, ed hanno la stessa diagonale, i polinomi caratteristici si calcolano dal prodotto delle tre differenze pivot  $-\lambda$ , ottenendo

$$p_{L_{A_1}} = p_{L_{A_2}} = p_{L_{A_3}} = -(1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

Per i polinomi minimi:

- Per  $A_1$ , abbiamo che  $PM_{A_1}(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$  o  $PM_{A_1}(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$ . Dato che

$$(A-I)(A-2I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

abbiamo che  $PM_{A_1}(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$ .

- Per  $A_2$ , procediamo col metodo dei polinomi generici di grado crescente. Dato che  $A_2$  non è diagonale, non esistono soluzioni del sistema

$$A_2 - aI_3 = 0$$

e il polinomio minimo non ha grado 1 (avremmo potuto vederlo immediatamente dal polinomio caratteristico)

Vediamo se il polinomio minimo ha grado 2 risolvendo il sistema

$$A_2^2 + aA_2 + bI_3 = 0$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1+a+b & 3+a & 0 \\ 0 & 4+2a+b & 0 \\ 0 & 0 & 4+2a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+1=0 \\ a+3=0 \\ 2a+b+4=0 \end{cases}$$

da cui è soluzione  $a = -3$ ,  $b = 2$ . Il polinomio minimo è quindi

$$PM_{A_2}(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

di grado 2. Ha tutte le radici in  $\mathbb{R}$  ed è libero da quadrati, quindi  $L_{A_2}$  è diagonalizzabile.

- Per  $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  procediamo col metodo dei polinomi generici di grado crescente. Dato che  $A_3$  non è diagonale, come prima il polinomio minimo non ha grado 1. Vediamo se il polinomio minimo ha grado 2 risolvendo il sistema

$$A_3^2 + aA_3 + bI_3 = 0$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} a+b+1 & a+2 & 1 \\ 0 & a+b+1 & a+2 \\ 0 & 0 & a+b+1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+1=0 \\ a+2=0 \\ 1=0 \end{cases}$$

Questo non ha soluzioni. Il grado del polinomio minimo è quindi 3 e

$$PM_{A_2}(\lambda) = p_{A_3}(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)^2 \text{ a meno del segno}$$

tutte le radici sono in  $\mathbb{R}$  ma ci sono radici multiple:  $L_{A_3}$  non è diagonalizzabile.

Quindi

**Osservazione 21.77.** [NNN40] Due matrici quadrate possono avere stesso polinomio caratteristico ma diverso polinomio minimo.

**Osservazione 21.78.** [M108] La matrice identica  $I_n$  o suoi multipli per  $b \in K$  sono le uniche matrici che hanno un polinomio minimo di primo grado.

Vediamo facilmente che  $PM_{bI_n}$  ha grado 1, dato che

$$I_n - bI_n = 0$$

e quindi  $PM_{I_n}(\lambda) = \lambda - b$ , di grado 1.

Viceversa, se  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$  e  $PM_A = \lambda + a$  abbiamo che

$$A + bI_n = \underline{0} \Rightarrow A = -bI_n$$

**Esercizio 21.79.** [LL79] Sia  $A \in \text{Mat}_{2,2}(\mathbb{K})$  con  $PM_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$ . Dimostrare che  $A$  è diagonalizzabile.

*Soluzione.* Il polinomio  $\lambda^2 - 1$  divide il polinomio caratteristico di  $A$ . Questo ha grado 2, e quindi il polinomio caratteristico di  $A$  è  $\lambda^2 - 1$ , con autovalori  $\pm 1$ . Le due molteplicità algebriche sono uguali ad 1, e le molteplicità geometriche sono forzate ad essere ambedue 1. Per il teorema di caratterizzazione della diagonalizzazione,  $A$  è quindi diagonalizzabile.  $\square$

**Esercizio 21.80.** [LL80] *Sia  $A \in \text{Mat}_{2,2}(\mathbb{K})$  tale che  $A^2 = I$ . Dimostrare che  $A$  è diagonalizzabile.*

*Soluzione.* Dato che  $PM_A(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$  è il polinomio monico di grado minore che viene annullato dalla matrice  $A$ , e che  $(\lambda^2 - 1)(A) = \underline{0}$ , per quanto detto prima  $PM_A(\lambda)$  divide  $\lambda^2 - 1$ . Ci sono tre possibilità:

1.  $PM_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$  e si procede come nell'esercizio precedente,  $A$  è diagonalizzabile.
2.  $PM_A(\lambda) = \lambda + 1$ . Allora  $PM_A(A) = A + I_n = \underline{0}$  e quindi  $A = -I_n$  è diagonale.
3.  $PM_A(\lambda) = \lambda - 1$ . Allora  $PM_A(A) = A - I_n = \underline{0}$  e quindi  $A = I_n$  è diagonale.

$\square$

## 21.10 Esercizi svolti

**Esercizio 21.81.** [NNN98a] *Dato  $a \in \mathbb{R}$  e l'endomorfismo*

$$T_a: \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$$

$$p(t) \mapsto t \cdot p'(t - a)$$

*al variare di  $a$  discutere la diagonalizzabilità di  $T_a$ .*

*Soluzione.* Vediamo le immagini di una base di  $\mathbb{R}^3$ ,  $1, t, t^2, t^3$ :

$$\begin{aligned} T(1) &= (t \cdot (1)')_{t \rightarrow t-a} = (t \cdot 0)_{t \rightarrow t-a} = 0 \\ T(t) &= (t \cdot (t-a)')_{t \rightarrow t-a} = (t \cdot 1)_{t \rightarrow t-a} = t - a \\ T(t^2) &= (t \cdot ((t-a)^2)')_{t \rightarrow t-a} = (t \cdot 2(t-a))_{t \rightarrow t-a} = 2t^2 - 4at + 2a^2 \\ T(t^3) &= (t \cdot ((t-a)^3)')_{t \rightarrow t-a} = (t \cdot 3(t-a)^2)_{t \rightarrow t-a} = 3t^3 - 9t^2a + 9a^2t - 3a^3 \end{aligned}$$

Usando l'isomorfismo

$$\psi: \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto \underline{e}_4 \\ t &\mapsto \underline{e}_3 \\ t^2 &\mapsto \underline{e}_2 \\ t^3 &\mapsto \underline{e}_1 \end{aligned}$$

Il nostro endomorfismo si trasforma nell'endomorfismo :  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} \bar{T}: \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ \underline{e}_1 &\mapsto (3, -9a, 9a^2, -3a^3) \\ \underline{e}_2 &\mapsto (0, 2, -4a, 2a^2) \\ \underline{e}_3 &\mapsto (0, 0, 1, -a) \\ \underline{e}_4 &\mapsto (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

ed abbiamo

$$(M_{\bar{T}})_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -9a & 2 & 0 & 0 \\ 9a^2 & -4a & 1 & 0 \\ -3a^3 & 2a^2 & -a & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p_{\overline{T}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -6a & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3a^2 & -2a & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)\lambda$$

Dato che abbiamo quattro autovalori distinti non dipendenti da  $a$  e siamo in dimensione 4 l'endomorfismo  $\overline{T}$  e quindi  $T$  è diagonalizzabile per ogni  $a$ . □

**Esercizio 21.82.** [QQQ98] *Dato l'endomorfismo*

$$\begin{array}{lcl} T: & \mathbb{R}[t]_{\leq 3} & \rightarrow \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \\ & 1 & \mapsto 0 \\ & t & \mapsto 1 \\ & t^2 & \mapsto 2t \\ & t^3 & \mapsto 3t^2 \end{array}$$

*Determinare autovettori ed autovalori di  $T$ , e dire se  $T$  è diagonalizzabile.*

*Soluzione.* Dato che  $1, t, t^2, t^3$  è una base di  $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ , usando l'isomorfismo

$$\begin{array}{lcl} \psi: & \mathbb{R}[t]_{\leq 3} & \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ & 1 & \mapsto \underline{e}_4 \\ & t & \mapsto \underline{e}_3 \\ & t^2 & \mapsto \underline{e}_2 \\ & t^3 & \mapsto \underline{e}_1 \end{array}$$

Il nostro endomorfismo si trasforma nell'endomorfismo  $\overline{T} = \psi \circ T \circ$

$$\begin{array}{lcl} \overline{T}: & \mathbb{R}^4 & \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ & \underline{e}_1 & \mapsto (0, 3, 0, 0) \\ & \underline{e}_2 & \mapsto (0, 0, 2, 0) \\ & \underline{e}_3 & \mapsto (0, 0, 0, 1) \\ & \underline{e}_4 & \mapsto (0, 0, 0, 0) \end{array}$$

ed abbiamo

$$(M_{\overline{T}})_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p_{\overline{T}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4$$

Abbiamo un solo autovalore, 0, di molteplicità algebrica 4. Calcoliamo la sua molteplicità geometrica

$$\text{mg}(0) = 4 - \text{rk} \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=0} = 4 - \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq \text{ma}(0)$$

E  $\bar{T}$  e quindi  $T$  non è diagonalizzabile.

Proposto: Esiste  $n$  tale che  $T^n$  è diagonalizzabile?

□

**Esercizio 21.83.** [NNN97a] Dato l'endomorfismo

$$T: \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+2b & b-c \\ c-d & a+b+c \end{pmatrix}$$

determinare autovettori ed autovalori di  $T$ , e dire se  $T$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ .

*Soluzione.* Consideriamo la base di  $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usiamo l'isomorfismo

$$\psi: \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{array}{ll} M_{1,1} & \mapsto \underline{e}_1 \\ M_{1,2} & \mapsto \underline{e}_2 \\ M_{2,1} & \mapsto \underline{e}_3 \\ M_{2,2} & \mapsto \underline{e}_4 \end{array}$$

Vediamo le immagini secondo  $T$  della base di  $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{ll} M_{1,1} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\psi} (1, 0, 0, 1) \\ M_{1,2} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\psi} (2, 1, 0, 1) \\ M_{2,1} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\psi} (0, -1, 1, 1) \\ M_{2,2} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\psi} (0, 0, -1, 0) \end{array}$$

e quindi in  $\mathbb{R}^4$  abbiamo l'endomorfismo  $\bar{T}$  associato rispetto alla base canonica alla matrice

$$(M_{\bar{T}})_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p_{\bar{T}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 1$$

Vediamo innanzitutto la diagonalizzabilità su  $\mathbb{Q}$ : usando le regola delle radici razionali abbiamo che le possibili radici di  $p_{\bar{T}}(\lambda)$  sono  $\pm 1$  ed abbiamo  $p_{\bar{T}}(1) = -2$ ,  $p_{\bar{T}}(-1) = 10$ . Quindi  $p_{\bar{T}}(\lambda)$  non ha radici razionali, e  $\bar{T}$  non ha autovalori in  $\mathbb{Q}$ , e non è quindi diagonalizzabile su  $\mathbb{Q}$ .

Calcoliamo  $\text{gcd}(p_{\bar{T}}(\lambda), p'_{\bar{T}}(\lambda))$  mediante la versione di Sturm dell'algoritmo euclideo.

```

P0:=x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x - 1;
P1:=Der(P0,x);P1;
//4x^3 - 9x^2 + 8x - 3;
GCDPolySTURMVerbose(P0,P1);

(x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x - 1)=(1/4x - 3/16)*(4x^3 - 9x^2 + 8x - 3)+(5/16x^2 - 3/4x - 25/16)
(4x^3 - 9x^2 + 8x - 3)=(-4/5x - 3/25)*(-5x^2 + 12x + 25)+(736/25x)
(-5x^2 + 12x + 25)=(5x - 12)*(-x)+(25)
(-x)=(x)*(-1)+(0)
lista delle coppie [[x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x - 1, 4x^3 - 9x^2 + 8x - 3],
                    [4x^3 - 9x^2 + 8x - 3, -5x^2 + 12x + 25],
                    [-5x^2 + 12x + 25, -x],
                    [-x, -1]]
Record[GCD = -1, Sequence =
[x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x - 1, 4x^3 - 9x^2 + 8x - 3, -5x^2 + 12x + 25, -x, -1]]

```

Dato che l'ultimo elemento della sequenza è uno scalare,  $\gcd(p_{\overline{T}}(\lambda), p'_{\overline{T}}(\lambda)) = 1$ , che vuol dire che il polinomio è libero da quadrati. Essendo su  $\mathbb{C}$ , quindi, ha tutte le radici e tutte di molteplicità uno, e quindi  $\overline{T}$  è diagonalizzabile.

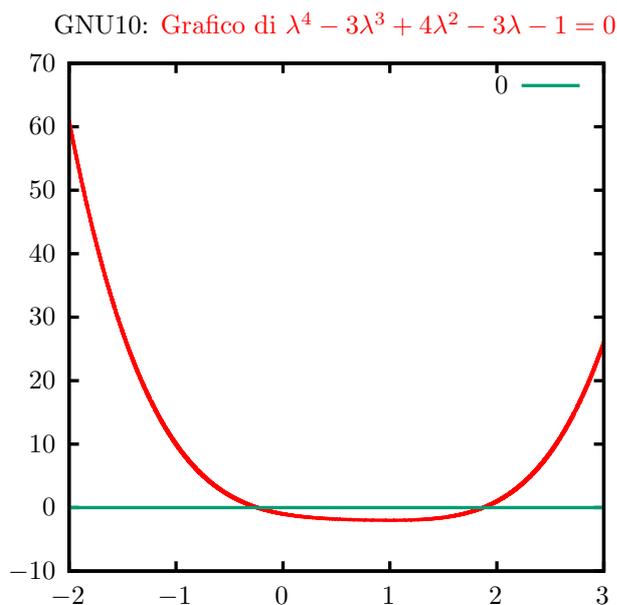
Per la diagonalizzabilità su  $\mathbb{R}$  usiamo la sequenza di Sturm per calcolare il numero di radici reali. La sequenza è, come visto prima

$$(\lambda^4 - 3\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 1, 4\lambda^3 - 9\lambda^2 + 8\lambda - 3, -5\lambda^2 + 12\lambda + 25, -\lambda, -1)$$

Abbiamo

$$V_- = \#[1, -4, -5, 1, -1] = 3 \text{ e } V_+ = \#[1, 4, -5, -1, -1] = 1$$

e quindi il numero di radici è  $3 - 1 = 2$ . Il polinomio caratteristico non ha tutte le radici nel campo e quindi  $\overline{T}$  non è diagonalizzabile. Vediamo il grafico del polinomio caratteristico.



Se siete curiosi di trovare la forma esatta delle soluzioni, che esiste trattandosi di un'equazione di quarto grado, andate sul sito <https://www.wolframalpha.com> chiedete

`solve x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x - 1=0`

chiedendo la forma esatta e intuite immediatamente perchè tale soluzione esatta è utile fino ad un certo punto.  $\square$

**Esercizio 21.84.** [MNS80] Dato l'endomorfismo  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  associato dalla base canonica alla matrice

$$(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Al variare di  $k \in \mathbb{R}$

1. Calcolare gli autovalori di  $T$ .
2. Determinare se  $T$  è diagonalizzabile.
3. In caso affermativo, determinare una base di autovettori. [Lungo]

*Soluzione.*

1. Il polinomio caratteristico è dato da

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-k)(\lambda^2+5\lambda+3)$$

le sue radici reali, e quindi gli autovalori di  $T$  sono  $0, k, \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

2. Per vedere se  $T$  è diagonalizzabile, distinguiamo i vari casi

- (a)  $k \neq 0, \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$ . Abbiamo quattro autovalori distinti su  $\mathbb{R}^4$ , e  $T$  è quindi diagonalizzabile.
- (b)  $k = 0$ . Abbiamo  $P_T(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + 5\lambda + 3)$ , un autovalore con molteplicità algebrica due e due autovalori con molteplicità algebrica uno. Le molteplicità geometriche degli autospazi associati a questi ultimi due autovalori sono forzate ad essere anch'esse uno. Vediamo

$$\begin{aligned} \text{mg}(0) &= 4 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=0, k=0} \\ &= 4 - rk \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 4 - 2 = 2 = \text{ma}(0) \end{aligned}$$

dato che abbiamo una riga di zeri e la prima e seconda riga sono opposte. Quindi  $T$  è diagonalizzabile.

(c)  $k = \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$ . Abbiamo  $p_T(\lambda) = \lambda \left( \lambda - \frac{-5-\sqrt{13}}{2} \right)^2 \left( \lambda - \frac{-5+\sqrt{13}}{2} \right)$ . Come prima, basta calcolare

$$\begin{aligned} \operatorname{mg} \left( \frac{-5-\sqrt{13}}{2} \right) &= 4 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=k=\frac{-5-\sqrt{13}}{2}} \\ &= 4 - rk \begin{pmatrix} 1 - \frac{-5-\sqrt{13}}{2} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 - \frac{-5-\sqrt{13}}{2} & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 - \frac{-5-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e dato che abbiamo una riga e colonna nulla e che, dopo qualche conto, vediamo che

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \frac{-5-\sqrt{13}}{2} & -1 & 1 \\ -1 & 1 - \frac{-5-\sqrt{13}}{2} & -1 \\ 3 & 0 & 3 - \frac{-5-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} = 25\sqrt{13} + 95$$

ed il rango che cerchiamo è 3, abbiamo

$$\operatorname{mg} \left( \frac{-5-\sqrt{13}}{2} \right) = 4 - 3 = 1 \neq \operatorname{ma} \left( \frac{-5-\sqrt{13}}{2} \right)$$

e quindi per  $k = \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$   $T$  non è diagonalizzabile.

(d)  $k = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$  è lasciato per esercizio.

3. Determinare una base di autovettori è lasciato per esercizio. [Lungo]

□

**Esercizio 21.85.** [KL09] Sia  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un endomorfismo descritto da

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema

$$T^{10}((x, y, z)) + T^3((x, y, z)) = \underline{0}$$

*Soluzione.* Vediamo se  $T$  è diagonalizzabile, ed in caso affermativo opereremo con la sua forma diagonale. Calcoliamo gli autovalori di  $T$  da

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = F(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Dato che

$$F(\pm 1) = F(2) = 0$$

gli autovalori sono  $\pm 1, 2$  e la matrice è diagonalizzabile. Sia  $B$  una base di autovettori di  $T$ , che esiste in quanto  $T$  è diagonalizzabile. Abbiamo per esempio

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esprimiamo il sistema usando  $(M_T)_B^B$

$$\begin{aligned} T^{10}((x, y, z)) + T^3((x, y, z)) &= \underline{0} \\ ((M_T)_B^B)^{10} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + ((M_T)_B^B)^3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \underline{0} \\ \left[ ((M_T)_B^B)^{10} + ((M_T)_B^B)^3 \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \underline{0} \\ \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{10} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^3 \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \underline{0} \\ \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \underline{0} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1032 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \underline{0} \end{aligned}$$

Il rango della matrice è 2, quindi la dimensione delle soluzioni del sistema è 1. □

**Esercizio 21.86.** [NNN50] *Dato l'endomorfismo*

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{C}^4 &\rightarrow \mathbb{C}^4 \\ (x, y, z, t) &\mapsto (2y, x, -t, z) \end{aligned}$$

*Dire se è diagonalizzabile su  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .*

*Soluzione.* Abbiamo

$$T(\underline{e}_1) = (0, 1, 0, 0), \quad T(\underline{e}_2) = (2, 0, 0, 0), \quad T(\underline{e}_3) = (0, 0, 0, 1), \quad T(\underline{e}_4) = (0, 0, -1, 0)$$

e quindi

$$(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico si calcola facilmente dato che si tratta di una matrice a blocchi:

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - 2)(\lambda^2 + 1)$$

Q Non tutte le radici sono in  $\mathbb{Q}$ , e quindi  $T$  non è diagonalizzabile.

R Non tutte le radici sono in  $\mathbb{R}$ , e quindi  $T$  non è diagonalizzabile.

C Tutte le radici sono in  $\mathbb{C}$ , e sono tutte distinte. Quindi  $T$  è diagonalizzabile.

Notiamo che non basta che ogni riga e colonna di una matrice abbiano un solo elemento non nullo per garantire la diagonalizzabilità dell'endomorfismo associato.  $\square$

**Esercizio 21.87.** [JJ93] Dato l'endomorfismo  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  associato dalla base canonica alla matrice

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Determinare il polinomio caratteristico di  $T$ .

2. Determinare il polinomio minimo di  $T$ .

3. Dire se  $T$  è diagonalizzabile.

*Dimostrazione.*

1. Determiniamo il polinomio caratteristico di  $T$

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 5-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12$$

2. Per calcolare il polinomio minimo di  $T$  fattorizziamo il polinomio caratteristico di  $T$

$$p_T(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12$$

Procediamo con il metodo delle radici razionali. Le possibili radici sono

$$\pm 1, \pm 2 \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$$

Abbiamo

$$p_T(1) = 2 \quad p_T(-1) = 36 \quad p_T(2) = 0$$

Quindi  $\lambda - 2$  è un fattore lineare di  $d(\lambda)$ . Dividendo  $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12$  per  $\lambda - 2$  otteniamo  $-\lambda^2 + 5\lambda - 6$ . Fattorizziamo questo polinomio di secondo grado con la formula ed otteniamo

$$-\lambda^2 + 5\lambda - 6 = -(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

e quindi una fattorizzazione del polinomio caratteristico di  $T$  è

$$p_T(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$$

Dato che la il polinomio minimo deve essere monico, avere gli stessi fattori irriducibili del polinomio caratteristico e grado minore od uguale, abbiamo solo due possibilità per il polinomio minimo di  $T$ :

$$f(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3) \quad \text{e} \quad g(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$$

Il polinomio minimo è tra questi due quello di grado minore che viene annullato da  $M$ . Dato che

$$\begin{aligned} f(M) &= (M - 2 \cdot I_3) \cdot (M - 3 \cdot I_3) \\ &= \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot I_3 \right) \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot I_3 \right) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

il polinomio minimo di  $T$  è  $(\lambda - 2)(\lambda - 3) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ .

3. Dato che il polinomio minimo ha tutte le radici in  $\mathbb{R}$  e nessun fattore multiplo,  $T$  è diagonalizzabile. □

**Esercizio 21.88.** [KL14] Sia  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'endomorfismo avente come autovettori

$$\underline{v}_1 = (1, 1, 0), \quad \underline{v}_2 = (0, 1, 1), \quad \underline{v}_3 = (0, 0, 1)$$

rispetto agli autovalori 1, 1, 2. Determinare la dimensione dell'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$(T^3 - 4T^2 + 6T - 3I_3)(x, y, z) = \underline{0}$$

*Soluzione.* Determiniamo il polinomio caratteristico di  $T$ . Vogliamo vedere se i tre autovettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$  siano linearmente indipendenti. Lo sono, basta controllare che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Abbiamo quindi tre autovettori linearmente indipendenti, e quindi una base di autovettori. Allora  $T$  è diagonalizzabile, e dato che conosciamo gli autovalori, il polinomio caratteristico è dato da

$$P_T(\lambda) = (1 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$$

Sappiamo che  $T$  annulla il proprio polinomio caratteristico (Teorema di Cayley-Hamilton),

$$-T^3 + 4T^2 - 5T + 2I_3 = 0 \implies T^3 - 4T^2 + 5T - 2I_3 = 0$$

quindi l'equazione diviene

$$\begin{aligned} (T^3 - 4T^2 + 6T - 3I_3)(x, y, z) &= 0 \\ (T^3 - 4T^2 + 5T - 2I_3 + T - I_3)(x, y, z) &= 0 \\ (T - I_3)(x, y, z) &= 0 \\ ((M_T)_E^E - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \\ \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

e dato che questo è un sistema omogeneo con matrice associata di rango 1, abbiamo  $\infty^2$  soluzioni. □

**Esercizio 21.89.** [KL12] *Sia data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Determinare il polinomio caratteristico di A.*

2. *Calcolare  $A^{317} - A^{64}$ .*

*Soluzione.*

1. Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & -2 & -2 \\ 2 & 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda$$

Quindi il polinomio caratteristico di  $A$  è  $P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda$ .

2. Sappiamo che la matrice annulla il proprio polinomio caratteristico, quindi abbiamo che

$$P(A) = 0 \implies A^3 = A$$

Dato che  $317 = 256 + 32 + 27 + 2 = 2^8 + 2^4 + 3^3 + 2$  abbiamo  $A^{317} = A^{256} \cdot A^{32} \cdot A^{27} \cdot A^2$  da cui

$$\begin{aligned} A^4 &= A^3 A = A \cdot A = A^2 \\ A^8 &= (A^4)^2 = A^2 \\ A^{64} &= (A^8)^8 = (A^2)^8 = (A^8)^2 = (A^2)^2 = A^4 = A^2 \\ A^{256} &= (A^{64})^4 = (A^2)^4 = A^8 = A^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^9 &= (A^3)^3 = (A)^3 = A \\ A^{27} &= (A^9)^3 = A^3 = A \end{aligned}$$

Quindi

$$A^{317} = A^{256} \cdot A^{32} \cdot A^{27} \cdot A^2 = A^2 \cdot A^2 \cdot A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = A^3 = A$$

Quindi

$$A^{317} - A^{64} = A - A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Rimarchiamo che si possono trovare altre strade per calcolare  $A^{317}$ ,  $A^{64}$ .

**Proposto:** si può dimostrare facilmente per induzione che  $A^{2^n} = A^2$  e  $A^{3^n} = A$ . Si veda se è possibile dare (e provare per induzione) una formula generale per  $A^{2^n}$ ,  $A^{2^{n+1}}$  e  $A^n$ . □

**Esercizio 21.90.** [KL06] Si determini la matrice  $A$  associata ad un'applicazione lineare  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sapendo che  $T$  ammette gli autovalori  $1, -2$  e

$$V_1 = \text{Span}((1, 2)), \quad V_{-2} = \text{Span}((2, 1))$$

*Soluzione.* Scegliamo di determinare la matrice  $(M_T)_{E_2}^{E_2}$ .  
questa matrice, generica, associata a  $T$  è

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Imponiamo le due condizioni, per esempio imponendo che

$$T((1, 2)) = (1, 2) \text{ e } T((2, 1)) = -2 \cdot (2, 1)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dato che le due condizioni devono essere soddisfatte contemporaneamente, abbiamo che  $a, b, c, d$  devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ c + 2d = 2 \\ 2a + b = -4 \\ 2c + d = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a + b = -4 \\ c + 2d = 2 \\ 2c + d = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a + b = -4 \end{cases} \cup \begin{cases} c + 2d = 2 \\ 2c + d = -2 \end{cases}$$

che hanno soluzioni

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = -2 \\ d = 2 \end{cases}$$

L'applicazione  $T$  è quindi associata alla matrice

$$(M_T)_{E_2}^{E_2} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Procedimento alternativo scegliendo una base che non sia  $E_2$ :

Dato che i due vettori  $v_1 = (1, 2)$  e  $v_2 = (2, 1)$  sono linearmente indipendenti, formano una base  $B$  di  $\mathbb{R}^2$ .  
Date le condizioni, abbiamo che

$$T(v_1) = v_1 \text{ e } T(v_2) = -v_2$$

quindi

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

è la matrice associata all'applicazione secondo la base  $B$ . □

**Esercizio 21.91.** [ES2122D] Dati  $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^2$  linearmente indipendenti,  $a \in \mathbb{K}$  ed un endomorfismo  $T$  tale che per ogni  $v_1, v_2$

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{K}^2 &\rightarrow \mathbb{K}^2 \\ v_1 - v_2 &\mapsto v_1 - v_2 \\ av_1 + 2v_2 &\mapsto v_2 \end{aligned}$$

1. Determinare gli  $a$  tali che  $T$  sia iniettivo, surgettivo, isomorfismo.

*Soluzione.* Dato che  $T(v_1 - v_2) = v_1 - v_2$ , e quindi  $v_1 - v_2$  è autovettore di  $T$ , prendiamo come base  $B = v_1 - v_2, v_1$ . Questi due vettori sono linearmente indipendenti dato che lo sono  $v_1, v_2$  e quindi formano una base di  $\mathbb{K}^2$ . Vediamo di determinare l'immagine di  $v_1$ . Abbiamo

$$\begin{cases} T(v_1 - v_2) = v_1 - v_2 \\ T(av_1 + 2v_2) = v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(v_1) - T(v_2) = v_1 - v_2 \\ aT(v_1) + 2T(v_2) = v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2T(v_1) - 2T(v_2) = 2v_1 - 2v_2 \\ aT(v_1) + 2T(v_2) = v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2T(v_1) - 2T(v_2) = 2v_1 - 2v_2 \\ (a+2)T(v_1) = 2v_1 - v_2 = (v_1 - v_2) + v_1 \end{cases}$$

Se avessimo  $a = -2$ , avremmo  $0 = 2v_1 - v_2$  e  $v_1, v_2$  sarebbero linearmente dipendenti, contro l'ipotesi. Quindi possiamo supporre per ipotesi che  $a \neq -2$  e

$$T(v_1) = \frac{1}{a+2}(v_1 - v_2) + \frac{1}{a+2}v_1$$

Date le immagini di  $v_1 - v_2, v_1$  in base  $B$  abbiamo la matrice

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & \frac{1}{a+2} \end{pmatrix}$$

che, dato  $a \neq -2$ , è non singolare e quindi l'endomorfismo  $T$  è invertibile e quindi un isomorfismo e quindi iniettivo e surgettivo.

Ricapitolando: dalle ipotesi discende necessariamente che  $a \neq -2$ . Per tutte le  $a \neq -2$  l'endomorfismo  $T$  è isomorfismo, quindi iniettivo e surgettivo.  $\square$

**Esempio 21.92.** [MMM50] Dato l'endomorfismo di  $\mathbb{R}$ -spazi associato alla matrice

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinare  $p_T$  e una base di autovettori se possibile.

*Soluzione:* Determiniamo il polinomio caratteristico sviluppando il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix}$$

per la seconda colonna:

$$p_T(\lambda) = (2 - \lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Gli autovalori sono  $-1, 1, 2$ . Determiniamo le basi degli autospazi

1.  $V_{-1}$ . Una base è data dal ker della matrice

$$\left( (M_T)_{E_3}^{E_3} - (1)I_3 \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Questo mi dice che  $z = 0$  e  $x + y = 0 \Rightarrow x = -y$ . Vettore generico  $(-y, y, 0)$ . Base  $\underline{v}_1 = (-1, 1, 0)$ .

2.  $V_1$ . Una base è data dal ker della matrice

$$\left( (M_T)_{E_3}^{E_3} - (-1)I_3 \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questo mi dice che  $x = 0$  e  $3y + z = 0 \Rightarrow z = -3y$ . Vettore generico  $(0, y, -3y)$ . Base  $\underline{v}_2 = (0, 1, -3)$ .

3.  $V_2$ . Una base è data dal ker della matrice

$$\left( (M_T)_{E_3}^{E_3} - (2)I_3 \right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Questo mi dice che  $x = z = 0$ . Vettore generico  $(0, y, 0)$ . Base  $\underline{v}_3 = (0, 1, 0)$ .

I tre vettori  $\underline{v}_1 = (-1, 1, 0)$ ,  $\underline{v}_2 = (0, 1, -3)$ ,  $\underline{v}_3 = (0, 1, 0)$  sono linearmente indipendenti, dato che la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango massimo. Formano quindi una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^3$ . Rispetto a questa base,

$$(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Volendo verificare i conti, costruiamo le matrici  $(M_T)_{E_3}^{E_3}$ ,  $M_{E_3}^{\mathcal{B}}$  e  $M_{\mathcal{B}}^{E_3}$  e costruiamo  $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$  mediante il cambiamento di base:

```
MBE:=Mat[[-1, 0, 0],
          [1, 1, 1],
          [0, -3, 0]];
```

```
MEB:=Inverse(MBE);MEB;
Mat[[-1, 0, 0],
     [0, 0, -1/3],
     [1, 1, 1/3]];
```

```
MTEE:=Mat[[1, 0, 0],
           [1, 2, 1],
           [0, 0, -1]];
```

```
MEB*MTEE*MBE;
Mat[[1, 0, 0],
     [0, -1, 0],
     [0, 0, 2]]
```

Notiamo che le dimensioni dei ker sono sempre maggiori di 0, questo perchè se  $c$  è un autovalore, il ker deve contenere almeno un vettore non nullo.  $\square$

**Esempio 21.93.** [NNN00] Abbiamo l'endomorfismo di  $\mathbb{R}$ -spazi, con  $k \in \mathbb{R}$

$$T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x]_{\leq 2} & \rightarrow & \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \\ ax^2 + bx + c & \mapsto & (a + kb)x^2 + (ka + b)x + kc \end{array}$$

Dire, al variare di  $k$ , se  $T$  è diagonalizzabile.

*Soluzione:* Poniamoci in  $\mathbb{R}^3$  con l'isomorfismo

$$\psi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x]_{\leq 2} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x^2 & \mapsto & \underline{e}_1 \\ x & \mapsto & \underline{e}_2 \\ 1 & \mapsto & \underline{e}_3 \end{array}$$

Possiamo quindi interpretare  $T$  come l'endomorfismo

$$\bar{T}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (a, b, c) & \mapsto & (a + kb, ka + b, kc) \end{array}$$

ed abbiamo

$$\bar{T}(\underline{e}_1) = (1, k, 0) \quad \bar{T}(\underline{e}_2) = (k, 1, 0) \quad \bar{T}(\underline{e}_3) = (0, 0, k)$$

Quindi

$$(M_{\bar{T}})_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

e si vede facilmente, sviluppando

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & k & 0 \\ k & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & k - \lambda \end{pmatrix}$$

per la terza riga, che

$$p_{\bar{T}}(\lambda) = (k - \lambda)((1 - \lambda)^2 - k^2) = (k - \lambda)(1 - \lambda - k)(1 - \lambda + k) = -(\lambda - k)(\lambda - (1 - k))(\lambda - (1 + k))$$

e quindi i tre autovalori sono  $k, 1 - k, 1 + k$ .

Vediamo i vari casi

1. I tre autovalori possono essere tutti coincidenti? Vorrebbe dire che  $k$  soddisfa

$$\begin{cases} k = 1 - k \\ k = 1 + k \end{cases} \quad \text{che non ha soluzioni.}$$

Quindi i tre autovalori non possono essere tutti e tre coincidenti.

2. Due soli autovalori coincidenti. Abbiamo i tre casi

(a)  $k = 1 - k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$ . Abbiamo

$$p_{\bar{T}} = -\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)$$

con  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$  di molteplicità algebrica 2 e  $\lambda_2 = \frac{3}{2}$  di molteplicità algebrica 1. La molteplicità geometrica di  $\lambda_2$  è forzata ad essere 1. La molteplicità geometrica di  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$  è

$$\left(3 - rk \begin{pmatrix} 1 - \lambda & k & 0 \\ k & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & k - \lambda \end{pmatrix}\right)_{k=\frac{1}{2}, \lambda=\frac{1}{2}} = 3 - rk \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

e quindi per  $k = 0$   $\bar{T}$  è diagonalizzabile.

(b)  $k = 1 + k$ . Impossibile.

(c)  $1 - k = 1 + k \Rightarrow k = 0$ . Abbiamo

$$p_{\bar{T}} = -\lambda(\lambda - 1)^2$$

con  $\lambda_1 = 0$  di molteplicità algebrica 1 e  $\lambda_2 = 1$  di molteplicità algebrica 2. La molteplicità geometrica di  $\lambda_1 = 0$  è forzata ad essere 1. La molteplicità geometrica di  $\lambda_2 = 1$  è

$$\left(3 - rk \begin{pmatrix} 1 - \lambda & k & 0 \\ k & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & k - \lambda \end{pmatrix}\right)_{k=0, \lambda=1} = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 2$$

e quindi per  $k = 0$  l'endomorfismo  $\bar{T}$  è diagonalizzabile.

3. Se  $k \neq \frac{1}{2}, 0$ , i tre autovalori sono tutti distinti e  $\bar{T}$  (e quindi  $T$ ) è diagonalizzabile.

Riassumendo, l'endomorfismo  $\bar{T}$  (e quindi l'endomorfismo  $T$ ) è diagonalizzabile per ogni  $k \in \mathbb{R}$ . □

**Esercizio 21.94.** [ES03] Sia dato  $b \in \mathbb{R}$  e il morfismo  $T$  associato alla matrice

$$B = (M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ -b & b+1 & b \\ b & 0 & -b \end{pmatrix}$$

1. Al variare di  $b \in \mathbb{R}$  calcolare il polinomio caratteristico di  $T$ .
2. Esistono valori di  $b$  tali che il polinomio minimo di  $T$  abbia grado  $< 3$ ?
3. Esistono valori di  $b$  tali che  $T$  sia diagonalizzabile?

*Soluzione.*

1. Il polinomio caratteristico di  $T$  è  $-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda - 1)^2$ , come si può vedere sviluppando con Laplace secondo la terza riga od operando una parziale riduzione di Gauss sulla matrice  $B - \lambda \cdot I_3$ . Ricordiamo che la riduzione con Gauss della matrice  $B$  non dà in genere una matrice simile a  $B$  e quindi in genere il polinomio caratteristico della matrice ridotta non è uguale a quello della matrice di partenza.
2. Il polinomio minimo di  $T$  va cercato tra i seguenti candidati: i divisori del polinomio caratteristico che sono divisi da  $\text{sqfr}(-\lambda(\lambda - 1)^2) = \lambda(\lambda - 1)$ :

$$\lambda(\lambda - 1), \quad \lambda(\lambda - 1)^2$$

Esaminiamo i due casi

- $PM_T(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$ . Dovremmo avere

$$PM_T(B) = B \cdot (B - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

e questo è vero se  $b = 0$ .

Quindi se  $b = 0$   $PM_T(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$ , e questo è un polinomio minimo libero da quadrati con tutte le radici in  $\mathbb{R}$ , e quindi in questo caso  $T$  è diagonalizzabile.

3.  $PM_T(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$ , e quindi  $b \neq 0$ : dato che il polinomio minimo non è libero da quadrati, il morfismo  $T$  non è diagonalizzabile.

□

## 21.11 Esercizi proposti

**Esercizio 21.95.** [M152] Sia  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare con matrice associata

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Discutere la diagonalizzabilità di  $T$  al variare di  $k$  in  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 21.96.** [LL65] Sia  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare con matrice associata

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Dire se  $T$  è diagonalizzabile.

**Esercizio 21.97.** [LL64] Sia

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, y + 3z, x + y - z)$$

un endomorfismo di  $\mathbb{R}$ -spazi. Dire se è diagonalizzabile ed in questo caso determinare una base  $B$  tale che  $(M_T)_B^B$  sia diagonale.

**Esercizio 21.98.** [LLL64] Sia

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, y + 3z, x + y + z)$$

un endomorfismo di  $\mathbb{R}$ -spazi. Dire se è diagonalizzabile ed in questo caso determinare una base  $B$  tale che  $(M_T)_B^B$  sia diagonale.

**Esercizio 21.99** (Difficile). [LL89] Al variare di  $k \in \mathbb{R}$  si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 - k & -1 & 0 \\ k & 2 & k \\ 0 & 1 & 3 - k \end{pmatrix}$$

Per quali valori di  $k$  l'endomorfismo associato ad  $A$  dalla base canonica è diagonalizzabile?

**Esercizio 21.100.** [LL92] Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un endomorfismo tale che la matrice associata dalla base canonica sia

$$A_f : \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 3 & 2 & 1 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Per quali  $h \in \mathbb{R}$  il morfismo  $f$  è un isomorfismo?
2. Discutere, al variare di  $h \in \mathbb{R}$  gli autovalori di  $f$  e la loro molteplicità algebrica.
3. Per quali  $h \in \mathbb{R}$  il morfismo  $f$  è diagonalizzabile?

**Esercizio 21.101.** [UI21]

Siano dati in  $\mathbb{R}^3$  i vettori  $\underline{v}_1 = (0, 1, -1)$ ,  $\underline{v}_2 := (2, 0, 1)$  e  $\underline{v}_3 := (1, 2, 0)$ .

1. Verificare che esiste un unico endomorfismo  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  avente  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$  come autovettori associati, rispettivamente, agli autovalori 0, 3, 6.
2. Determinare  $M_f$ ,  $\ker(f)$  ed  $\text{Im}(f)$  rispetto a un opportuna base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^3$ .

**Esercizio 21.102.** [NNN09] Dato l'endomorfismo  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  associato dalla base canonica alla matrice

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{3,3}(\mathbb{R}),$$

Determinare il polinomio minimo di  $T$  e dire se  $T$  è diagonalizzabile.

**Esercizio 21.103.** [NNN92] Determinare autovettori, autovalori, polinomio minimo e caratteristico degli endomorfismi associati alle seguenti matrici, e dire se sono diagonalizzabili su  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

1.  $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$
2.  $\begin{pmatrix} -2 & 10 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 14 & 10 \end{pmatrix}$   $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$   $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
3.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -8 & 4 & -3 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$   $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -10 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \\ -13 & -1 & -3 & 26 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$   $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & 0 & 7 \\ -14 & -1 & -3 & 28 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
4.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ -3 & -8 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$   $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -8 & -6 & -4 & -4 \\ 12 & 8 & 4 & 2 \\ -4 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$   $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -6 \\ -1 & -2 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

**Esercizio 21.104.** [NNN99] Dato l'endomorfismo

$$T: \begin{array}{l} \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \\ p(t) \mapsto t \cdot p'(t) \end{array}$$

determinare autovettori ed autovalori di  $T$ , e dire se  $T$  è diagonalizzabile

**Esercizio 21.105.** [NNN98] Dato  $a \in \mathbb{R}$  e l'endomorfismo

$$T_a: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[t]_{\leq 3} & \rightarrow & \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \\ p(t) & \mapsto & t \cdot p'(t-a) \end{array}$$

Al variare di  $a$  determinare autovettori ed autovalori di  $T_a$ , e dire se  $T$  è diagonalizzabile.

**Esercizio 21.106.** [NNN97] Dato l'endomorfismo

$$T: \begin{array}{ccc} \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a+2b & b-c \\ c-d & a+b+c \end{pmatrix} \end{array}$$

determinare autovettori ed autovalori di  $T$ , e dire se  $T$  è diagonalizzabile.

**Esercizio 21.107.** [NNN96] Determina se possibile due matrici di  $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  che abbiano uguale polinomio caratteristico ma non siano simili.

**Esercizio 21.108.** [NNN95] Determina se possibile due matrici di  $\text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  che abbiano uguale polinomio caratteristico ma non siano simili.

**Esercizio 21.109.** [NNQ96] Determina se possibile due matrici di  $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  che abbiano uguale polinomio caratteristico ma ma diverso polinomio minimo.

**Esercizio 21.110.** [NNQ95] Determina se possibile due matrici di  $\text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  che abbiano uguale polinomio caratteristico ma diverso polinomio minimo.

**Esercizio 21.111.** [NNN94] Sia  $T: V \rightarrow V$  un endomorfismo di  $\mathbb{K}$ -spazi, con  $\dim V$  finita e  $T^k \equiv 0$ . Dimostrare che  $T$  è diagonalizzabile se e solo se  $T \equiv 0$ .

**Esercizio 21.112.** [NNN84] Trovare un  $T: V \rightarrow V$  endomorfismo di  $\mathbb{K}$ -spazi, con  $\dim V = 4$  tale che  $T \neq 0$  ma  $T^2 \equiv 0$ .

**Esercizio 21.113.** [NNN93] Trovare un  $T: V \rightarrow V$  endomorfismo di  $\mathbb{K}$ -spazi, con  $\dim V = 4$  tale che  $T^2 \neq 0$  ma  $T^3 \equiv 0$ .

**Esercizio 21.114.** [JJ08] Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1/2 & -1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Determinare autovalori ed autovettori di  $A$ .  $A$  è diagonalizzabile?
2. Determinare autovalori ed autovettori di  $A^2$ .  $A^2$  è diagonalizzabile?
3. La matrice  $A^3$  è diagonalizzabile?
4. La matrice  $A^{1003}$  è diagonalizzabile?

**Esercizio 21.115.** [NNN88] Dato  $k \in \mathbb{R}$  e l'endomorfismo

$$T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x]_{\leq 2} & \rightarrow & \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \\ a^2 + bx + c & \mapsto & x^2 + (a+b+c)x + k \end{array}$$

Al variare di  $k$

1. Calcolare gli autovalori di  $T$ .
2. Determinare se  $T$  è diagonalizzabile.
3. In caso affermativo, determinare una base di autovettori. [Difficile]

**Esercizio 21.116.** [NNN80] Dato l'endomorfismo  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  associato dalla base canonica alla matrice

$$(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Al variare di  $k \in \mathbb{R}$

1. Calcolare gli autovalori di  $T$ .
2. Determinare se  $T$  è diagonalizzabile.
3. In caso affermativo, determinare una base di autovettori. [Difficile]

**Esercizio 21.117.** [NNN90] Calcolare, se del caso al variare di  $a, b, k \in \mathbb{R}$  il polinomio minimo delle seguenti matrici

1.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$ ,
2.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+1 & 1 & 0 \\ 0 & b+2 & a \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$ ,
3.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4,4}(\mathbb{R})$ ,

**Esercizio 21.118.** [NNN22] Dire se i seguenti polinomi hanno tutte le radici in  $\mathbb{Q}$ , il caso contrario contare le radici distinte in  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ .

1.  $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ . [SI]
2.  $x^4 + 6x^3 - 29x^2 - 114x + 280$ . [SI]
3.  $x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 39x^2 + 36x + 108$ . [SI]
4.  $x^4 - 5x^2 + 6$ . [NO: 0, 4, 4]
5.  $x^7 - 6x^2 + 12$ . [NO: 0, 1, 7]

**Esercizio 21.119.** [NNN23] Contare il numero di radici distinte in  $\mathbb{R}$ , trovare le radici in  $\mathbb{C}$  quando possibile.

1.  $x^4 - 5x^2 + 6$ . [4]
2.  $x^5 - x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 10x - 10$ . [5]
3.  $x^8 - x^5 - x^3 + 1$ . [1]

4.  $2x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1$ . [0]

5.  $x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1$ . [0]

6.  $x^6 + x^5 - x^4 - 2x^3 - x^2 + x + 1$ . [2]

**Esercizio 21.120.** [QQQ51] Dato  $a \in \mathbb{R}$  e la funzione

$$T_a: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[t]_{\leq 3} & \rightarrow & \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \\ p(t) & \mapsto & t \cdot p'(t - a) \end{array}$$

determinare gli  $a \in \mathbb{R}$  per cui  $T_a$  è lineare.

Sol:  $\forall a \in \mathbb{R}$ .