1. *Per quali a, b, la funzione può essere un applicazione lineare?*

2. *Dare, per una base a scelta B di $\mathbb{R}^4$, la matrice $(M_T)_B^B$*

3. *Dare la matrice $(M_T)_E^E$*

Esercizio 21.34. `[LL88]` *Abbiamo l'applicazione lineare*

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (1,1,0) & \mapsto & (1,1,0,1) \\ & (1,-1,2) & \mapsto & (1,2,-1,0) \\ & (0,0,1) & \mapsto & (0,0,1,1) \end{array}$$

1. *L'applicazione T è iniettiva, surgettiva, biunivoca?*

2. *Determinare l'immagine di $(2,0,3)$.*

Esercizio 21.35. `[LLL89]` *Determinare tutti i morfismi $T\colon \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{K}[x]_{\leq}3$ che soddisfano le condizioni*

$$x^2+1 \mapsto x^2+1 \qquad x^2+3 \mapsto x^3-2$$

1. *Tra questi, dire se esistono determinare tutti i morfismi iniettivi.*

2. *Per questi questi, determinare $T(x)^{-1}$*

Esercizio 21.36. `[LLL90]` *Determinare tutti i morfismi $T\colon \operatorname{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \operatorname{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ che soddisfano le seguenti condizioni*

1. $\dim \ker T = 1$.

2. $I_2 \in \operatorname{Im} T$.

3. $T\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$

Esercizio 21.37. `[LLS90]` *Determinare tutti i morfismi $T\colon \operatorname{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \operatorname{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ che soddisfano le seguenti condizioni*

1. $\dim \ker T = 1$.

2. $I_2 \in \operatorname{Im} T$.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} T$.

4. $T\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$

Esercizio 21.38. `[LLX90]` *Dare descrizione cartesiana dei seguenti spazi*

1. $V = \operatorname{Span}((1,2,1,0),(0,0,1,2),(1,1,1,1)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{Q}^4$.

2. $V = \operatorname{Span}((i+1,i+1,i+1,i+1),(0,i+1,1,2),(i,i,i,i)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{C}^4$.

3. $V = \{(a+b+c, a-b, -a-c, c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^4$

4. $V = \{(a+b+c, a+b-c, a+b+3c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$

5. $V = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^4$

Esercizio 21.39. `[LLX91]` *Dare descrizione parametrica dei seguenti spazi*

1. $V = \{(x,y,z,t) \mid \begin{cases} 2x+y-3z=0 \end{cases} \} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^4$

2. $V = \{(x,y,z) \mid \} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$

3. $V = \{(x,y) \mid \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^2$

4. $V = \{(x,y,z,t) \mid \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+t=0 \\ 2x-3y-4z+t=0 \end{cases} \} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^2$

Parte VI

Autovettori ed autovalori

21.5 Matrici simili[Non richiesto]

Le nozioni di matrice simile e classe di similitudine non sono state introdotte in classe, e non sono richieste. Vengono lasciate in queste dispense per completezza. Molto brevemente, due matrici sono simili se rappresentano lo stesso morfismo rispetto a basi diverse. La classe di similitudine di una matrice A (o morfismo L_A) è data dall'insieme delle matrici simili ad A, quindi dalle matrici che rappresentano il morfismo L_A rispetto a tutte la basi possibili.

Matrici quadrate non singolari sono interpretabili come un cambio di base

Definizione-Proposizione 21.40. `[MMM03]` *L'insieme*

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = (\{M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \det M \neq 0\}, \cdot)$$

dove $\cdot$ è il prodotto di matrici è un gruppo con l'operazione di prodotto di matrici e si dice Gruppo lineare di ordine n su $\mathbb{K}$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio □

Problema 21.41. `[MMM30]` *Dato uno spazio vettoriale V di dimensione finita n ed un endomorfismo $T\colon V \to V$ di $\mathbb{K}$-spazi, vorremmo identificare una base $\mathcal{B}$ di V tale che $(M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ sia il più semplice possibile, al limite, se possibile, diagonale.*

Vediamo di caratterizzare tutte le matrici associate a $T\colon V \to V$ mediante una qualche base.

Definizione 21.42. `[MMM04]` *Due matrici quadrate $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ sono* simili *se esiste una matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che*

$$A = M^{-1}\cdot B \cdot M \Leftrightarrow M\cdot A = B\cdot M$$

Indichiamo questa relazione come $A \sim B$.

Corollario 21.43. `[MMM09]` *Date due matrici quadrate $A \sim B$ ho che*

1. $\det A = \det B$.
2. $rk\, A = rk\, B$.
3. $\dim\ker A = \dim\ker B$.

Esempio 21.44. `[MMM06]`

1. *Le matrici*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = B$$
non sono simili, perchè una è singolare mentre l'altra non lo è.
2. *Le matrici*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = B$$
non sono simili, perchè hanno rango diverso, $rk\, A = 3$, $rk\, B = 2$

Osservazione 21.45. `[MMM11]` *Date due matrici $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ abbiamo che $A \sim B$ se e solo se il sistema matriciale omogeneo (con n^2 incognite scalari)*

$$A \cdot X = X \cdot B$$

ammette una soluzione invertibile.

Vediamo un esempio di questo metodo

Esempio 21.46. `[MMM12]` *Dire se*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Soluzione: Cerchiamo una soluzione non singolare del sistema

$$A \cdot X = X \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2x - y + 3z & -7x + y + 3t \\ 3x - z - t & 3y - 7z + 2t \end{pmatrix} = 0_2$$

$$\begin{cases} -2x - y + 3z = 0 \\ -7x + y + 3t = 0 \\ 3x - z - t = 0 \\ 3y - 7z + 2t = 0 \end{cases}$$

```
M:=Mat([[-2,-1,3,0],
        [-7,1,0,3],
        [3,0,-1,-1],
        [0,3,-7,2]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=-2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [-2, -1, 3, 0]
   2^a-7/2*1^a [0, 9/2, -21/2, 3]
   3^a+3/2*1^a [0, -3/2, 7/2, -1]
  0 sotto pivot[0, 3, -7, 2]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=9/2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [-2, -1, 3, 0]
-------------- [0, 9/2, -21/2, 3]
   3^a+1/3*2^a [0, 0, 0, 0]
   4^a-2/3*2^a [0, 0, 0, 0]
```

E questo ci dice che non abbiamo solo la soluzione nulla, che è inaccettabile.

```
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
     1^a*-1/2  [1, 1/2, -3/2, 0]
     2^a*+2/9  [0, 1, -7/3, 2/3]
-------------- [0, 0, 0, 0]
-------------- [0, 0, 0, 0]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
 1^a-1/2*2^a   [1, 0, -1/3, -1/3]
-------------- [0, 1, -7/3,  2/3]
-------------- [0, 0,    0,    0]
-------------- [0, 0,    0,    0]
```

Quindi una soluzione generica è

$$X = \begin{pmatrix} -1/3z - 1/3t & -7/3z + 2/3t \\ z & t \end{pmatrix} \qquad \text{con } z, t \in \mathbb{K}$$

Se poniamo $z = 3,\ t = 0$ otteniamo la soluzione

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

che è non singolare, quindi $A \sim B$ □

Notiamo che qui stiamo determinando se due matrici date sono simili, e questo si può determinare risolvendo un sistema lineare. Il problema di trovare tutte le matrici simili ad una matrice data è molto più difficile da risolvere

Esempio 21.47. `[MMM15]` *Determinare tutte la matrici simili alla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

Soluzione: Dobbiamo cercare tutte la matrici

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tali che esista

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

Ovvero, dobbiamo risolvere il sistema

$$A \cdot X = X \cdot B$$

rispetto alle variabili x, y, z, t, a, b, c, d, e la soluzione X deve essere non singolare.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -xa + x - yc + 3z & -xb - yd + y + 3t \\ 3x - za + 2z - tc & 3y - zb - td + 2t \end{pmatrix} = 0_2$$

$$\begin{cases} -xa + x - yc + 3z = 0 \\ -xb - yd + y + 3t = 0 \\ 3x - za + 2z - tc = 0 \\ 3y - zb - td + 2t = 0 \end{cases}$$

Proviamo a risolvere questo sistema di equazioni *polinomiali non lineari* usando tecniche non viste a lezione:

```
Use R::=Q[a,b,c,d,x,y,z,t],Lex;
I:=Ideal(
-xa + x - yc + 3z,
-xb - yd + y + 3t,
3x - za + 2z - tc,
3y - zb - td + 2t,
xy-zt-1,// Pongo det X=1
);
```

```
Provo a semplificare il sistema
ReducedGBasis(I);
[cy + 1/3czt^2 + 1/3ct - dx - 1/3dz^2t - 1/3dz - xzt + x + 1/3z^2t - 8/3z,
cz^2t^2 + czt - 9c + 9dx^2 - dz^3t - 10dz^2 - 18x^2+
- 3xz^2t - 3xz + z^3t + 10z^2, cx + 1/3cz^2t + 1/3cz - dx^3+
 - 1/3dx^2z + dxz^2 + 2x^3 + 2/3x^2z - 2xz^2,
xy - zt - 1,
dxt - dyz - 2xt + yz - 3,
b + dy^2 - dt^2 - y^2 + 2t^2,
dy^2z - dzt^2 - dt - y^2z + 3y + 2zt^2 + 2t,
a + 1/9czt^3 + 1/9ct^2 - 1/9dz^2t^2 - 1/9dzt + d+
 - 1/3xzt^2 - 1/3xt + 1/9z^2t^2 + 1/9zt - 3]

Con scarso successo. Provo a porre a=z=0 per semplificare i conti,
sapendo che non ottero' tutte le matrici che cerco ma solo qualcuna:

I1:=Ideal(
-xa + x - yc + 3z,
-xb - yd + y + 3t,
3x - za + 2z - tc,
3y - zb - td + 2t,
xy-zt-1,// Pongo det X=1
a,z);// Pongo per semplificare i conti, arbitrariamente, a=z=0
Provo a semplificare il sistema
ReducedGBasis(I1);
[d - 3,
bc - 7,
a,
z,
t^2 - 9/7b,
y - 1/3t,
x - 1/3tc]
```

Quindi alcune delle matrici richieste sono, con $b \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{7}{b} & 3 \end{pmatrix}$$

Ma non ho idea delle altre....... $\square$

Vediamo che due matrici simili danno lo stesso morfismo *rispetto a basi diverse*. Ricordiamo che matrici diverse danno, rispetto *alla stessa base*, morfismi diversi.

Proposizione 21.48. [MMM08a] *Sia $T\colon V \to V$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$-spazi e $\mathcal{B}$ una base di V con $\dim V = n$. Allora*

1. *Se $\mathcal{B}'$ è una base di V, allora $(M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \sim (M_T)^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}$*
2. *Se $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $A \sim (M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$, allora esiste $\mathcal{C}$ base di V tale che $A = (M_T)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}$.*

Dimostrazione.

1. Basta notare che $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} (M_T)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$, con $\left(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.
2. Esiste per ipotesi $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che
$$A = M^{-1} \cdot (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M$$
Sia $\mathcal{B} = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$. I vettori $L_M(\underline{v}_1), \ldots, L_M(\underline{v}_n)$, in coordinate $\mathcal{B}$ formano una base $\mathcal{C}$ di V, dato che L_M è un isomorfismo (M è non singolare) e manda quindi una base in una base . Le colonne di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ sono date dai vettori di $\mathcal{C}$ in coordinate $\mathcal{B}$, ovvero dai vettori $L_M(\underline{v}_1), \ldots, L_M(\underline{v}_n)$. Quindi $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = M$ da cui $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = M^{-1}$ e quindi
$$\begin{aligned} A &= M^{-1} \cdot (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M \\ &= M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \\ &= (M_T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

□

Definizione 21.49. `[MMM10]` *Data una matrice quadrata $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, la sua* classe di similitudine *è*
$$\begin{aligned} \mathcal{O}_A &= \{B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \exists\, M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ tale che } A = M^{-1}BM\} \\ &= \{B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid A \sim B\} \end{aligned}$$

Osservazione 21.50. `[MMA10]` *Sia dato un endomorfismo $T\colon V \to V$, con $\dim V$ finita. Usando la sola definizione, vedere se esiste e se possibile determinare una base $\mathcal{B}$ tale che $(M_T)_B^B$ sia diagonale non è banale. Rifrasando l'affermazione precedente, data $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ non è banale vedere se esiste e se possibile determinare $D \in \mathcal{O}_A$ diagonale*

21.6 Autovalori ed autovettori

Definizione 21.51. `[MMM16]` *Sia dato V, un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita n ed un endomorfismo di $\mathbb{K}$-spazi $T\colon V \to V$. Allora*

1. *L'insieme* $\mathrm{sp}(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists\, \underline{v} \in V \text{ tale che } T(\underline{v}) = \lambda\underline{v}\} \subseteq \mathbb{K}$ *l'insieme degli autovalori di T, è detto* spettro di *T.*
2. *Un vettore non nullo $\underline{v} \in V$ è detto* autovettore *di T relativo all'autovalore $\lambda \in \mathrm{sp}\,T$ se $T(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$*
3. *Uno scalare $\lambda \in \mathrm{sp}(T)$ si dice* autovalore associato all'autovettore $\underline{v}$ *se $T(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$.*
4. *Se $\lambda \in \mathrm{sp}\,T$, l'insieme $V_\lambda = \{\underline{v} \in V \mid T(\underline{v}) = \lambda\underline{v}\} \subseteq V$ è detto* autospazio di *T.*

Osservazione 21.52. `[MMZ31]` *Con abuso di notazione, tutte la terminologia associata ad una matrice A verrà usata associata al morfismo L_A associato ad A. Per esempio, diremo che $T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è singolare se e solo se la matrice $(M_T)_B^B$ è singolare, dove B è una base di $\mathbb{K}^n$. Analogamente, un morfismo $T\colon V \to V$ verrà detto singolare se e solo se $\ker T \neq \{\underline{0}\}$. Etc. etc..*

Osservazione 21.53. `[MMM31]` *Con le notazioni della definizione precedente, se $V = \mathbb{K}^n$*

1. $T(\underline{v}) = \lambda\underline{v} \iff T(\underline{v}) - \lambda\underline{v} = \underline{0} \iff (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot \underline{v} - \lambda I_n \cdot \underline{v} = \underline{0} \iff ((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n) \cdot \underline{v} = \underline{0}$

2. $V_\lambda \underset{SSP}{\subseteq} V$. *Per il punto 1 abbiamo che*

$$V_\lambda = \{\underline{v} \in V \mid T(\underline{v}) = \lambda\underline{v}\} = \{\underline{v} \in V \mid ((M_T)_\mathcal{B}^\mathcal{B} - \lambda I_n) \cdot \underline{v} = \underline{0}\} = \ker\Big((M_T)_\mathcal{B}^\mathcal{B} - \lambda I_n\Big)$$

e questo abbiamo visto è un sottospazio di V.

3. Da quanto detto sopra, $\lambda \in \operatorname{sp} T$ *se e solo se l'endomorfismo* $T - \lambda id_n$ *è singolare. Abbiamo quindi* $V_0 = \ker T$. *Quindi* 0 *è autovalore se e solo se* T *è singolare (altrimenti l'unico elemento di* $\ker T$ *sarebbe il vettore nullo, che non è associato ad un autovalore).*

Proposizione 21.54. `[MMM17]` $\mathcal{B} = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ *con* $n > 1$ *una base di* $\mathbb{K}^n$ *e* $T \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *un endomorfismo di* $\mathbb{K}$*-spazi. Allora*

1. La funzione $\begin{array}{rccc} p_T\colon & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & \lambda & \mapsto & \det\Big((M_T)_\mathcal{B}^\mathcal{B} - \lambda I_n\Big) \end{array}$ *non dipende dalla base* $\mathcal{B}$.

2. $p_T(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(M_T)_\mathcal{B}^\mathcal{B}\,\lambda^{n-1} + \ldots + \det((M_T)_\mathcal{B}^\mathcal{B})\lambda^0 \in \mathbb{K}[\lambda]$

Ricordiamo che tr, *la traccia di una matrice quadrata, è la somma degli elementi sulla diagonale della matrice stessa.*

3. λ_0 *è un autovalore di* T *se e solo se* $p_T(\lambda_0) = 0$.

Dimostrazione.

1. Supponiamo di avere una base $\mathcal{C}$ rispetto a cui T è associato alla matrice $(M_T)_\mathcal{C}^\mathcal{C}$. Vogliamo dimostrare

$$\det\Big((M_T)_\mathcal{C}^\mathcal{C} - \lambda I_n\Big) = \det\Big((M_T)_\mathcal{B}^\mathcal{B} - \lambda I_n\Big)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} (M_T)_\mathcal{C}^\mathcal{C} &= \left(M_\mathcal{B}^\mathcal{C}\right)^{-1}(M_T)_\mathcal{B}^\mathcal{B}\,M_\mathcal{B}^\mathcal{C} \\ &\text{da cui} \\ \det\Big((M_T)_\mathcal{C}^\mathcal{C} - \lambda I_n\Big) &= \det\Big(\left(M_\mathcal{B}^\mathcal{C}\right)^{-1}(M_T)_\mathcal{B}^\mathcal{B}\,M_\mathcal{B}^\mathcal{C} - \lambda I_n\Big) \\ &\quad \text{dato che } I_n = {M_\mathcal{B}^\mathcal{C}}^{-1} M_\mathcal{B}^\mathcal{C} \\ &= \det\Big(\left(M_\mathcal{B}^\mathcal{C}\right)^{-1}(M_T)_\mathcal{B}^\mathcal{B}\,M_\mathcal{B}^\mathcal{C} - \lambda {M_\mathcal{B}^\mathcal{C}}^{-1} M_\mathcal{B}^\mathcal{C}\Big) \\ &= \det\Big(\left(M_\mathcal{B}^\mathcal{C}\right)^{-1}\Big((M_T)_\mathcal{B}^\mathcal{B} - \lambda I_n\Big)M_\mathcal{B}^\mathcal{C}\Big) \\ &\text{per Binet} \\ &= \det\left(M_\mathcal{B}^\mathcal{C}\right)^{-1}\det\Big((M_T)_\mathcal{B}^\mathcal{B} - \lambda I_n\Big)\det M_\mathcal{B}^\mathcal{C} \\ &\quad \text{dato che } \det\left(M_\mathcal{B}^\mathcal{C}\right)^{-1} = \frac{1}{\det M_\mathcal{B}^\mathcal{C}} \\ &= \det\Big((M_T)_\mathcal{B}^\mathcal{B} - \lambda I_n\Big) \end{aligned}$$

2. Basta valutare $p_T(\lambda) = \det\Big((M_T)_\mathcal{B}^\mathcal{B} - \lambda I_n\Big)$ in zero per avere che il suo termine noto è $\det M_\mathcal{B}^\mathcal{B}$.

Diamo un idea informale del resto della dimostrazione e poi una dimostrazione formale per induzione.

Voglio dimostrare che $p_T \in \mathbb{K}[\lambda]$, $\deg p_T = n$, il coefficente direttivo di p_T è $(-1)^n$ e il coefficente di λ^{n-1} è $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} (M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$. In classe non è stata svolta la dimostrazione dell'ultimo punto, sulla trasposta, e non verrà richiesta all'esame, è qui presente per completezza.

Che $p_T \in \mathbb{K}[\lambda]$ è immediato perchè le operazioni che faccio per ottenerlo sono solo somme e prodotti di elementi $\left((M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} - \lambda I_n\right)$ che stanno in $\mathbb{K}[\lambda]$.

Se sviluppo il determinante con Laplace, è evidente che ogni elemento della matrice compare una volta sola nel calcolo, e dato che la variabile λ compare esattamente in n elementi della matrice $\left((M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} - \lambda I_n\right)$ ho che $\deg p_T(\lambda) \leq n$.

Dimostrazione per induzione su n.

- Passo base $n = 2$. Sia
$$(M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
Abbiamo
$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= (-1)^2\lambda^2 + (-1)^1(\operatorname{tr} (M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}})\lambda + \det (M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

□

- Passo induttivo $n - 1 \Rightarrow n$
Vogliamo dimostrare che per ogni endomorfismo $T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ abbiamo
$$p_T(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr} (M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\, \lambda^{n-1} + \dots$$
sapendo che per ogni endomorfismo $T'\colon \mathbb{K}^{n-1} \to \mathbb{K}^{n-1}$ abbiamo che
$$p_{T'}(\lambda) = (-1)^{n-1}\lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} \operatorname{tr} (M_{T'})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\, \lambda^{n-2} + \dots$$
Abbiamo che
$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$
sviluppiamo con Laplace per la prima colonna
$$= (a_{11} - \lambda) \det \begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} + \text{ termini di grado al più } n - 2$$

dato che il resto è una combinazione lineare su $\mathbb{K}$ di determinanti di matrici in cui λ compare esattamente $n-2$ volte (non compare il termine di indice $(1,1)$ e per la colonna i-esima), l'elemento (i,i) della diagonale. Quindi questa combinazione lineare mi dà un polinomio in λ di grado al più $n-2$.

$$= (a_{11}-\lambda)\det(A-\lambda\cdot I_{n-1}) + \text{ termini di grado al più } n-2$$

dove $A=(M_{T'})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ per un opportuno endomorfismo $T'\colon \mathbb{K}^{n-1}\to\mathbb{K}^{n-1}$

Per l'ipotesi induttiva,

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= (a_{11}-\lambda)[(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}(a_{22}+\cdots+a_{nn})+\cdots]+\cdots \\ &= (-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots \\ &= (-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}\operatorname{tr}(M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\lambda^{n-1}+\cdots \end{aligned}$$

ed il termine noto, per quanto detto precedentemente, è $p_T(0)=\det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$

3. Voglio dimostrare che λ_0 è un autovettore di T se e solo se $p_T(\lambda_0)=0$.

   Lo scalare λ_0 è un autovalore di T se e solo se il sistema

   $$(M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\,\underline{x}=\lambda_0\underline{x}$$

   ammette una soluzione non nulla, e questo accade se e solo se la matrice $(M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}-\lambda_0 I_n$ è singolare (per il Teorema di Rouché-), ovvero se e solo se

   $$\det\left((M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}-\lambda_0 I_n\right)=p_T(\lambda_0)=0$$

□

Definizione 21.55. `[MMM22]` *Dato un endomorfismo di $\mathbb{K}$-spazi $T\colon\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$ il polinomio*

$$p_T(\lambda)=\det\left((M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}-\lambda I_n\right)$$

è detto polinomio caratteristico di T.

Corollario 21.56. `[MMM21]` *Con le notazioni della proposizione precedente, notiamo immediatamente che*

1. *Dato che gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico, il numero degli autovalori di T è minore uguale al grado del polinomio caratteristico p_T, ovvero alla dimensione di V.*

2. *Il termine noto di $p_T(\lambda)$ è il determinante di $(M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.*

Esempio 21.57. `[MMM23]` *Sia dato l'endomorfismo $T\colon\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$ con matrice associata rispetto alla base canonica*

$n=2$

$$(M_T)^{E_2}_{E_2}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

allora $p_T(\lambda)=\lambda^2-2\lambda$, senza neppure calcolare il determinante, dato che i termini di grado $2,1,0$ sono dati rispettivamente da $(-1)^2$, $\operatorname{tr}(M_T)^{E_2}_{E_2}=1+1=2$ e $\det(M_T)^{E_2}_{E_2}=0$

$n = 3$

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

allora

$$p_T(x) = \det\left((M_T)_{E_3}^{E_3} - \lambda I_3\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 3 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda - 14$$

Come previsto, il coefficente di testa è -1, il secondo è $(-1)^2 \cdot 5$, la traccia della matrice ed il termine noto è -14, il determinante della matrice.

$n = 4$

$$(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

allora

$$p_T(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2 = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 13\lambda^2 - 12\lambda + 4$$

Come previsto, il coefficente di testa è 1, il secondo è $(-1^3) \cdot 6$, l'opposto della traccia della matrice ed il termine noto è 4, il determinante della matrice.

Notiamo che gli elementi sopra la diagonale sono irrilevanti per il calcolo del polinomio caratteristico.

$n = 4$

$$(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

allora $p_T(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 23\lambda^2 - 28\lambda + 12$

Osservazione 21.58. Per calcolare il determinante della matrice $A - \lambda I$ posso ridurre con Gauss *la matrice* $A - \lambda I$. RIDURRE A CON GAUSS E *POI* CALCOLARE IL DETERMINANTE DI $A - \lambda I$ È UN ERRORE GRAVE

Esempio 21.59. `[MMM70]` *Infatti*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Gauss} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ma

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 1 \quad ma \quad \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1$$

Proposizione 21.60. `[MMM18]` *Sia $T\colon V \to V$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$-spazi e $\mathcal{B}$ base di V. Allora $\mathcal{B}$ è composta di autovettori se e solo se $(M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ è diagonale.*

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. □

Corollario 21.61 (Non richiesto). `[MMM19]` *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Allora esiste una base di autovettori per L_A se e solo se A è simile ad una matrice diagonale se e solo se $\mathcal{O}_A$ contiene almeno una matrice diagonale.*

Definizione 21.62. `[MMM20]` *Sia $T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$-spazi. Diciamo che T* ha tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$ *se p_T ha esattamente n radici in $\mathbb{K}$ contate con la loro molteplicità.*

Esempio 21.63. `[MMA00]` *Il polinomio caratteristico dell'endomorfismo associato alla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{è} \qquad \det\begin{pmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

e non ha radici in $\mathbb{R}$.

21.7 Endomorfismi diagonalizzabili

Nel prosieguo di questa sezione, considereremo endomorfismo su un $\mathbb{K}$-spazio V di dimensione finita n, non necessariamente su $\mathbb{K}^n$. Il polinomio caratteristico si ottiene dopo trasportato la situazione in $\mathbb{K}^n$ mediante un opportuno isomorfismo.

Proposizione 21.64. `[MMM52]` *Sia $T\colon V \to V$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$-spazi e $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in V$ non nulli corrispondenti ad autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Allora $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Induzione su k.

- Base $k = 1$ Ovvio.
- Passo induttivo: OK per $k-1$, proviamo per k. Supponiamo che $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{k-1}$ siano linearmente indipendenti. Vogliamo provare che

  $$\alpha_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k\underline{v}_k = \underline{0} \Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{0}$$

  Abbiamo quindi la relazione $\boxed{\alpha_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k\underline{v}_k = \underline{0}}$

  Applichiamo T

  $$T(\alpha_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k\underline{v}_k) = T(\underline{0}) = \underline{0}$$
  $$\alpha_1 T(\underline{v}_1) + \cdots + \alpha_k T(\underline{v}_k) = \underline{0}$$

  dato che $\underline{v}_i$ sono autovettori otteniamo la relazione

  $$\boxed{\alpha_1\lambda_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k\lambda_k\underline{v}_k = \underline{0}}$$

  Sfruttando la prima relazione

  $$\alpha_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k\underline{v}_k = \underline{0} \Leftrightarrow \alpha_k\underline{v}_k = -\alpha_1\underline{v}_1 - \cdots - \alpha_{k-1}\underline{v}_{k-1}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
\alpha_1\lambda_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\lambda_{k-1}\underline{v}_{k-1} + \lambda_k(-\alpha_1\underline{v}_1 - \cdots - \alpha_{k-1}\underline{v}_{k-1}) &= \underline{0} \\
\alpha_1\lambda_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\lambda_{k-1}\underline{v}_{k-1} - \alpha_1\lambda_k\underline{v}_1 - \cdots - \alpha_{k-1}\lambda_k\underline{v}_{k-1}) &= \underline{0} \\
\text{raccogliamo i vettori } \underline{v}_i \\
\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\underline{v}_{k-1} &= \underline{0}
\end{aligned}$$

e dato che $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{k-1}$ sono linearmente indipendenti per l'ipotesi induttiva, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) &= 0 \\
&\vdots \\
\alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) &= 0
\end{aligned}$$

ma dato che gli autovalori λ_j sono tutti distinti per ipotesi, abbiamo per ogni $i : 1 \ldots k$ $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$ e quindi

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$$

Quindi ricordando $\alpha_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k\underline{v}_k = \underline{0}$ abbiamo che $\alpha_k\underline{v}_k = \underline{0} \Rightarrow \alpha_k = 0$ e dato che $\underline{v}_k$ è un autovettore, $\underline{v}_k \neq \underline{0}$ e quindi anche $\alpha_k = 0$. Abbiamo dimostrato che $\underline{\alpha} = \underline{0}$ e quindi $\underline{v}_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

□

Corollario 21.65. `[MMM53]` *Con la notazione della proposizione precedente, se $\underline{v}_1, \ldots, v_k$ appartengono ad autospazi distinti di T, allora*

$$\underline{v}_1 + \cdots + v_k = \underline{0} \Rightarrow \underline{v}_1 = \cdots = \underline{v}_k = \underline{0}$$

Dimostrazione. Ricordiamo che l'unico elemento di un autospazio che non sia un autovettore è il vettore nullo. Supponiamo per assurdo che qualcuno dei vettori $\underline{v}_i$ sia non nullo, e quindi autovettori associati ad autospazi distinti. Tra questi autovettori vi sarebbe una relazione di dipendenza lineare, il che è assurdo per la Proposizione 21.64 precedente. Quindi, tutti i vettori $\underline{v}_i$ sono nulli. □

Corollario 21.66. `[MMM54]` *Sia $T\colon V \to V$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$-spazi. Se T ha n autovalori distinti, allora T è diagonalizzabile.*

Dimostrazione. Se ho n autovalori distinti, ho n autospazi distinti. Quindi prendendo un autovettore da ciascuno, ho n vettori indipendenti per la Proposizione 21.64. Questi autovettori formano una base di autovettori e quindi T è diagonalizzabile. □

Definizione 21.67. `[MMM55]` *Sia $T\colon V \to V$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$-spazi e $\lambda_0 \in \operatorname{sp} T$. Allora*

1. *la* molteplicità algebrica *di λ_0 è la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico p_T. La indicheremo con* ma_{λ_0}.
2. *La* molteplicità geometrica *di λ_0 è $\dim V_{\lambda_0}$. La indicheremo con* mg_{λ_0}.

Esempio 21.68. [MMM56] *L' endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato alla matrice*

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ha polinomio caratteristico

$$p_T(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32$$

notiamo che $p_T(2) = 0$. Quindi $(\lambda - 2)|p_T(\lambda)$ ed operando una divisione di polinomi otteniamo

$$p_T(\lambda) = (\lambda - 2)(-x^2 + 10x - 16) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 16) = (2 - \lambda)^2(8 - \lambda)$$

fattorizzando il fattore di secondo grado con la formula.

Quindi la molteplicità algebrica di 2 è 2 e di 8 è 1. Abbiamo

- $\mathrm{mg}_2 = 3 - rk\left((M_T)_{E_3}^{E_3} - 2I_3\right) = 3 - rk \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$
- $\mathrm{mg}_8 = 3 - rk\left((M_T)_{E_3}^{E_3} - 8I_3\right) = 3 - rk \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$

Per esercizio, vedere che l'unione delle basi degli autospazi mi dà una base $\mathcal{B}$ di V e quindi T è diagonalizzabile e $(M_T)_{E_3}^{E_3}$ è simile, per esempio, alla matrice

$$(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

21.8 Criteri di diagonalizzabilità

Proposizione 21.69. [MMM57] *La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità geometrica.*

Dimostrazione. Sia $T\colon V \to V$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$-spazi, $\dim V = n$ e $\lambda_0 \in \operatorname{sp} T$ con molteplicità geometrica mg_{λ_0}, che indicheremo con k. Sia $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ una base di V_{λ_0}; completiamola a $\mathcal{B} = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, v_{k+1}, \dots, \underline{v}_n$ base di V. Quindi

$$(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_0 I_k & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

con $0, B, C$ matrici opportune. Quindi

$$(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n = \left(\begin{array}{c|c} (\lambda_0 - \lambda) I_k & B \\ \hline 0 & C - \lambda I_d \end{array}\right)$$

con $d = n - k$ Questa è una matrice a blocchi e quindi

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) = \det\left((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n\right) &= \det\left((\lambda_0 - \lambda) I_k\right) \det(C - \lambda I_d) \\ &= (\lambda_0 - \lambda)^k p_C(\lambda) \end{aligned}$$

e dato che per definizione la molteplicità algebrica di λ_0 è il massimo s per cui $(\lambda_0 - \lambda)^s \mid p_T(\lambda)$, e $(\lambda_0 - \lambda)^k \mid p_T(\lambda)$ abbiamo che la molteplicità algebrica è maggiore od uguale a $k = \mathrm{mg}_{\lambda_0}$. $\square$

Teorema 21.70 (Criterio di Diagonalizzabilità)**.** `[MMM58]` *Sia $T\colon V \to V$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$-spazi e $\dim V = n$. Se $\operatorname{sp} T = \{\lambda_1, \dots, \lambda_h\}$, indichiamo con ma_{λ_i} e mg_{λ_i} le molteplicità geometriche ed algebriche di λ_i con $i : 1 \dots h$. Allora TFAE (i seguenti fatti sono equivalenti):*

1. *T è diagonalizzabile.*
2. *Ogni elemento di V si scrive come somma di autovettori di T relativi ad autovalori distinti.*
3. *$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_h}$.*
4. *T ha tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$ e $\mathrm{ma}_{\lambda_i} = \mathrm{mg}_{\lambda_i}$ per $i : 1 \dots h$ (per ogni autovalore la molteplicità geometrica ed algebrica coincidono).*
5. *$\mathrm{mg}_{\lambda_1} + \cdots + \mathrm{mg}_{\lambda_h} = n$.*

Dimostrazione.

1 ⇒2 Per ipotesi esiste $\mathcal{B} = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base di V composta di autovettori, quindi per ogni vettore $v \in V$ esiste $\underline{\alpha} \in \mathbb{K}^n$ tale che

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$$

se raggruppiamo i termini $\lambda_i \underline{v}_i$ corrispondenti agli autovettori associati ad uno stesso autospazio abbiamo la tesi.

2 ⇒3 Siano $\lambda_i, \dots, \lambda_h$ gli autovalori distinti di T. Per ipotesi abbiamo che per ogni $\underline{v} \in V$ esistono $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_h$ con $\underline{v}_i \in V_{\lambda_i}$ per $i : 1, \dots, h$ tali che

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \cdots + \underline{v}_h$$

Dobbiamo dimostrare che questa scrittura è unica (gli $\underline{\underline{v}}$ sono unici). Supponiamo che esistano $\underline{\underline{v}}'$ tali che

$$\underline{v}_1 + \cdots + \underline{v}_h = \underline{v}_1' + \cdots + \underline{v}_h'$$
$$(\underline{v}_1 - \underline{v}_1') + \cdots + (\underline{v}_h - \underline{v}_h') = \underline{0}$$

Ma dato che i $\underline{v}_i, \underline{v}_i'$ appartengono allo stesso autospazio, V_{λ_i} abbiamo che $\underline{v}_i - \underline{v}_i' \in V_{\lambda_i}$. Dato che gli autospazi V_{λ_i} sono distinti, per il Corollario 21.65 abbiamo che $\underline{v}_i - \underline{v}_i' = \underline{0}$ e quindi $\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{v}}'$ da cui la tesi.

3 ⇒4 So che $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_h}$ e voglio dimostrare che tutte le radici di T sono in $\mathbb{K}$ e

$$\forall\ i : 1, \dots, h \quad \mathrm{ma}_{\lambda_i} = \mathrm{mg}_{\lambda_i}$$

Abbiamo dall'ipotesi e dalla definizione di molteplicità geometrica

$$\dim V = n = \dim V_{\lambda_1} + \cdots + \dim V_{\lambda_h} = \mathrm{mg}_{\lambda_1} + \cdots + \mathrm{mg}_{\lambda_h}$$

Dato che le ma sono le molteplicità algebriche delle radici di $p_T(\lambda)$, che ha grado $n = \dim V$, ho

$$\dim V = n \geq \mathrm{ma}_{\lambda_1} + \cdots + \mathrm{ma}_{\lambda_h}$$

Dalla Proposizione 21.69 ho

$$\forall\ i : 1, \dots, h \quad \mathrm{ma}_{\lambda_i} \geq \mathrm{mg}_{\lambda_i}$$

Quindi

$$\mathrm{ma}_{\lambda_1} + \cdots + \mathrm{ma}_{\lambda_h} \geq \mathrm{mg}_{\lambda_1} + \cdots + \mathrm{mg}_{\lambda_h} = n \geq \mathrm{ma}_{\lambda_1} + \cdots + \mathrm{ma}_{\lambda_h}$$

Quindi

$$\mathrm{ma}_{\lambda_1} + \cdots + \mathrm{ma}_{\lambda_h} = \mathrm{mg}_{\lambda_1} + \cdots + \mathrm{mg}_{\lambda_h} = n$$

Quindi tutte le radici di $p_T(\lambda)$ stanno in $\mathbb{K}$. Ora,

$$\begin{aligned} \mathrm{ma}_{\lambda_1} + \cdots + \mathrm{ma}_{\lambda_h} - (\mathrm{mg}_{\lambda_1} + \cdots + \mathrm{mg}_{\lambda_h}) &= 0 \\ (\mathrm{ma}_{\lambda_1} - \mathrm{mg}_{\lambda_1}) + \cdots + (\mathrm{ma}_{\lambda_h} - \mathrm{mg}_{\lambda_h}) &= 0 \\ \text{dato che } \forall\ i : 1, \dots, h\ \ \mathrm{ma}_{\lambda_i} - \mathrm{mg}_{\lambda_i} \geq 0 \\ \text{abbiamo } \forall\ i : 1, \dots, h \quad \mathrm{ma}_{\lambda_i} - \mathrm{mg}_{\lambda_i} &= 0 \end{aligned}$$

4 $\Rightarrow$5 Ho che T ha tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$ e $\forall\, i : 1, \dots, h$ $\mathrm{ma}_{\lambda_i} = \mathrm{mg}_{\lambda_i}$. Voglio dimostrare $\mathrm{mg}_{\lambda_1} + \cdots + \mathrm{mg}_{\lambda_h} = \dim V =$

Per ipotesi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{h} \mathrm{mg}_{\lambda_i} &= \sum_{i=1}^{h} \mathrm{ma}_{\lambda_i} \\ &T \text{ ha tutti gli autovalori in } \mathbb{K} \\ &= n \end{aligned}$$

5 $\Rightarrow$1 Ho $\sum_{i=1}^{h} \mathrm{mg}_{\lambda_i} = n$. Voglio dimostrare che T è diagonalizzabile. Ricordiamo che T è diagonalizzabile se e solo esiste una base di V composta di autovettori di T.

Siano $\underline{\underline{v}}_1, \dots, \underline{\underline{v}}_h$ basi di $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_h}$ rispettivamente. Per ipotesi, l'insieme

$$\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{v}}_1 \cup \ldots \cup \underline{\underline{v}}_h$$

la nostra candidata base, contiene $\dim V$ vettori. Ci basta dimostrare che questi vettori sono linearmente indipendenti. Usiamo la definizione di indipendenza lineare: abbiamo

$$\underline{\alpha}_1 \cdot \underline{\underline{v}}_1 + \cdots + \underline{\alpha}_h \cdot \underline{\underline{v}}_h = \underline{0}$$

e vogliamo $\underline{\alpha}_1 = \cdots = \underline{\alpha}_h = \underline{0}$.

Per ogni $i : 1, \dots, h$ abbiamo che $\underline{\alpha}_i \underline{\underline{v}}_i \in V_{\lambda_i}$, e questi sono autospazi associati ad autovalori distinti quindi, per il Corollario 21.65, $\underline{\alpha}_i \cdot \underline{\underline{v}}_i = \underline{0}$. Ma dato che $\underline{\underline{v}}_i$ è base di V_{λ_i}, questo implica $\underline{\alpha}_i = \underline{0}$ e quindi la tesi.

□

21.9 Polinomio minimo

Definizione 21.71. [NNN01] *Dato $T \colon V \to V$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$-spazi,* $\dim V = n$ *e* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e*

$$f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda^1 + a_0 \in \mathbb{K}[\lambda]$$

Allora

1. *La* valutazione di f in T *è l' endomorfismo*

$$f(T) = a_n T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1 T^1 + a_0\, \mathrm{id}_{V\to V}$$

2. *La* valutazione di f in A *è la matrice*

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A^1 + a_0 I_n$$

Esempio 21.72. `[NNN02]` *Dato l' endomorfismo di $\mathbb{K}$-spazi*

$$\begin{array}{cccc} T\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$

e $f(\lambda) = x^2 - 3x - 2$ *abbiamo che*

$$\begin{array}{cccc} T^2\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & T(T(x,y)) = T((x+y, x-y)) = (x+y+x-y, x+y-x+y) = (2x, 2y) \end{array}$$

e quindi

$$\begin{array}{cccc} f(T)\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (2x,2y) - 3(x+y, x-y) - 2(x,y) = (-3x-3y, -3x+3y) \end{array}$$

Notiamo che

$$T(\underline{e}_1) = (1,1) \qquad e \qquad T(\underline{e}_2) = (1,-1)$$

e quindi $(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *Abbiamo*

$$\begin{aligned} f((M_T)_{E_3}^{E_3}) &= {(M_T)_{E_3}^{E_3}}^2 - 3 \cdot (M_T)_{E_3}^{E_3} - 2 \cdot I_2 \\ f((M_T)_{E_3}^{E_3}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ f((M_T)_{E_3}^{E_3}) &= \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Osservazione 21.73. `[NNN05]` *Dato $T\colon V \to V$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$-spazi con base $\mathcal{B}$ e $f(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$.*

$$\left(M_{f(T)}\right)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = f\left((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)$$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. $\square$

Definizione-Proposizione 21.74. `[NNN06]` *Data $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e l'endomorfismo $T = L_A$. Prendiamo in considerazione l'insieme*

$$I_A = \{f \in \mathbb{K}[\lambda] \mid f(A) = \underline{0}\}$$

Abbiamo che

1. *Teorema di Cayley-Hamilton: il polinomio caratteristico di p_{L_A} appartiene all'insieme I_A. Questo significa che*

$$p_{L_A}(A) = 0$$

2. *Esiste $PM_A(\lambda) \in I_A$ monico, di grado minimo positivo tra gli elementi di I_A detto* polinomio minimo di A (o di L_A)*, PM_A, (o PM_{L_A}) che divide tutti gli elementi di I_A.*

3. *Data una fattorizzazione in irriducibili del polinomio caratteristico di L_A*

$$p_{L_A}(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} f_i(\lambda)^{\alpha_i} \quad \alpha_i \geq 1,\ \alpha_1 + \cdots \alpha_k = n$$

allora una fattorizzazione in irriducibili del polinomio minimo di L_A rispetta la condizione

$$PM_{L_A}(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} f_i(\lambda)^{\beta_i} \quad 1 \leq \beta_i \leq \alpha_i$$

Rifrasando il punto precedente, il polinomio minimo divide $p_T(\lambda)$ ed è diviso da $\mathrm{sqfr}(p_T(\lambda))$.

4. *Quindi il polinomio minimo di L_A divide il polinomio caratteristico di L_A, ha le stesse radici ma con molteplicità minore od uguale e quindi il suo grado è compreso tra 1 e n.*

5. *Se $T\colon V \to V$ è un endomorfismo di $\mathbb{K}$-spazio con* $\dim V = n$, *con base $\mathcal{B}$ il* polinomio minimo *di T è $PM_T(\lambda)$ e non dipende dalla base.*

Teorema 21.75 (Criterio di Diagonalizzabilità mediante il polinomio minimo)**.** `[NNN08]` *Sia $T\colon V \to V$ un endormorfismo di $\mathbb{K}-$spazi. Allora T è diagonalizzabile se e solo se PM_T ha tutte le radici in $\mathbb{K}$ e non ha radici multiple.*

Esercizio 21.76. `[NNN10]` *Calcolare polinomio caratteristico e minimo delle tre matrici in* $\mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dato che le matrici sono tutte triangolari superiori, ed hanno la stessa diagonale, i polinomi caratteristici si calcolano dal prodotto delle tre differenze pivot$-\lambda$, ottenendo

$$p_{L_{A_1}} = p_{L_{A_2}} = p_{L_{A_3}} = -(1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

Per i polinomi minimi:

- *Per A_1, abbiamo che $PM_{A_1}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$ o $PM_{A_1}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$. Dato che*

$$(A - I)(A - 2I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

  abbiamo che $PM_{A_1}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$.

- *Per A_2, procediamo col metodo dei polinomi generici di grado crescente. Dato che A_2 non è diagonale, non esistono soluzioni del sistema*

$$A_2 - aI_3 = 0$$

  e il polinomio minimo non ha grado 1 (avremmo potuto vederlo immediatamente dal polinomio caratteristico)

  Vediamo se il polinomio minimo ha grado 2 risolvendo il sistema

$$A_2^2 + aA_2 + bI_3 = 0$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1+a+b & 3+a & 0 \\ 0 & 4+2a+b & 0 \\ 0 & 0 & 4+2a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+1=0 \\ a+3=0 \\ 2a+b+4=0 \end{cases}$$

da cui è soluzione $a=-3,\ b=2$. Il polinomio minimo è quindi

$$PM_{A_2}(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$$

di grado 2. Ha tutte le radici in $\mathbb{R}$ ed è libero da quadrati,m quindi L_{A_2} sè diagonalizzabile.

- *Per $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ procediamo col metodo dei polinomi generici di grado crescente. Dato che A_3 non è diagonale, come prima il polinomio minimo non ha grado 1. Vediamo se il polinomio minimo ha grado 2 risolvendo il sistema*

$$A_3^2 + aA_3 + bI_3 = 0$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} a+b+1 & a+2 & 1 \\ 0 & a+b+1 & a+2 \\ 0 & 0 & a+b+1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+1=0 \\ a+2=0 \\ 1=0 \end{cases}$$

Questo non ha soluzioni. Il grado del polinomio minimo è quindi 3 e

$$PM_{A_2}(\lambda) = p_{A_3}(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 \text{ a meno del segno}$$

tutte le radici sono in $\mathbb{R}$ ma ci sono radici multiple: L_{A_3} non è diagonalizzabile.

Quindi

Osservazione 21.77. [NNN40] *Due matrici quadrate possono avere stesso polinomio caratteristico ma diverso polinomio minimo.*

Osservazione 21.78. [M108] *La matrice identica I_n o suoi multipli per $b \in K$ sono le uniche matrici che hanno un polinomio minimo di primo grado.*

Vediamo facilmente che PM_{bI_n} ha grado 1, dato che

$$I_n - bI_n = 0$$

e quindi $PM_{I_n}(\lambda) = \lambda - b$, di grado 1.

Viceversa, se $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ e $PM_A = \lambda + a$ abbiamo che

$$A + bI_n = \underline{0} \Rightarrow A = -bI_n$$

Esercizio 21.79. [LL79] *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{K})$ con $PM_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$. Dimostrare che A è diagonalizzabile.*

Soluzione. Il polinomio $\lambda^2 - 1$ divide il polinomio caratteristico di A. Questo ha grado 2, e quindi il polinomio caratteristico di A è $\lambda^2 - 1$, con autovalori ± 1. Le due molteplicità algebriche sono uguali ad 1, e le molteplicità geometriche sono forzate ad essere ambedue 1. Per il teorema di caratterizzazione della diagonabilizzazione, A è quindi diagonalizzabile. □

Esercizio 21.80. `[LL80]` *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{K})$ tale che $A^2 = I$. Dimostrare che A è diagonalizzabile.*

Soluzione. Dato che $PM_A(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ è il polinomio monico di grado minore che viene annullato dalla matrice A, e che $(\lambda^2 - 1)(A) = \underline{0}$, per quanto detto prima $PM_A(\lambda)$ divide $\lambda^2 - 1$. Ci sono tre possibilità:

1. $PM_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$ e si procede come nell'esercizio precedente, A è diagonalizzabile.
2. $PM_A(\lambda) = \lambda + 1$. Allora $PM_A(A) = A + I_n = \underline{0}$ e quindi $A = -I_n$ è diagonale.
3. $PM_A(\lambda) = \lambda - 1$. Allora $PM_A(A) = A - I_n = \underline{0}$ e quindi $A = I_n$ è diagonale.

□

21.10 Esercizi svolti

Esercizio 21.81. `[NNN98a]` *Dato $a \in \mathbb{R}$ e l'endomorfismo*

$$\begin{array}{rccc} T_a\colon & \mathbb{R}[t]_{\leq 3} & \to & \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \\ & p(t) & \mapsto & t \cdot p'(t-a) \end{array}$$

al variare di a discutere la diagonalizzabilità di T_a.

Soluzione. Vediamo le immagini di una base di $\mathbb{R}^3$, $1, t, t^2, t^3$:

$$\begin{array}{rcl} T(1) & = & (t \cdot (1)')_{t \to t-a} = (t \cdot 0)_{t \to t-a} = 0 \\ T(t) & = & (t \cdot (t-a)')_{t \to t-a} = (t \cdot 1)(t \cdot (1)')_{t \to t-a} = t - a \\ T(t^2) & = & (t \cdot ((t-a)^2)')(t \cdot (1)')_{t \to t-a} = (t \cdot 2(t-a))(t \cdot (1)')_{t \to t-a} = 2t^2 - 4at + 2a^2 \\ T(t^3) & = & (t \cdot ((t-a)^3)')(t \cdot (1)')_{t \to t-a} = (t \cdot 3(t-a)^2)(t \cdot (1)')_{t \to t-a} = 3t^3 - 9t^2a + 9a^2t - 3a^3 \end{array}$$

Usando l'isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & \mathbb{R}[t]_{\leq 3} & \to & \mathbb{R}^4 \\ & 1 & \mapsto & \underline{e}_4 \\ & t & \mapsto & \underline{e}_3 \\ & t^2 & \mapsto & \underline{e}_2 \\ & t^3 & \mapsto & \underline{e}_1 \end{array}$$

Il nostro endomorfismo si trasforma nell'endomorfismo : $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$\begin{array}{rccl} \overline{T}\colon & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & \underline{e}_1 & \mapsto & (3, -9a, 9a^2, -3a^3) \\ & \underline{e}_2 & \mapsto & (0, 2, -4a, 2a^2) \\ & \underline{e}_3 & \mapsto & (0, 0, 1, -a) \\ & \underline{e}_4 & \mapsto & (0, 0, 0, 0) \end{array}$$

ed abbiamo

$$(M_{\overline{T}})_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -9a & 2 & 0 & 0 \\ 9a^2 & -4a & 1 & 0 \\ -3a^3 & 2a^2 & -a & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p_{\overline{T}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -6a & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3a^2 & -2a & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)\lambda$$

Dato che abbiamo quattro autovalori distinti non dipendenti da a e siamo in dimensione 4 l'endomorfismo $\overline{T}$ e quindi T è diagonalizzabile per ogni a.

□

Esercizio 21.82. `[QQQ98]` *Dato l'endomorfismo*

$$\begin{array}{cccc} T\colon & \mathbb{R}[t]_{\leq 3} & \to & \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \\ & 1 & \mapsto & 0 \\ & t & \mapsto & 1 \\ & t^2 & \mapsto & 2t \\ & t^3 & \mapsto & 3t^2 \end{array}$$

Determinare autovettori ed autovalori di T, e dire se T è diagonalizzabile.

Soluzione. Dato che $1, t, t^2, t^3$ è una base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$, usando l'isomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \psi\colon & \mathbb{R}[t]_{\leq 3} & \to & \mathbb{R}^4 \\ & 1 & \mapsto & \underline{e}_4 \\ & t & \mapsto & \underline{e}_3 \\ & t^2 & \mapsto & \underline{e}_2 \\ & t^3 & \mapsto & \underline{e}_1 \end{array}$$

Il nostro endomorfismo si trasforma nell'endomorfismo $\overline{T} = \psi \circ T \circ$

$$\begin{array}{cccc} \overline{T}\colon & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & \underline{e}_1 & \mapsto & (0,3,0,0) \\ & \underline{e}_2 & \mapsto & (0,0,2,0) \\ & \underline{e}_3 & \mapsto & (0,0,0,1) \\ & \underline{e}_4 & \mapsto & (0,0,0,0) \end{array}$$

ed abbiamo

$$(M_{\overline{T}})_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p_{\overline{T}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4$$

Abbiamo un solo autovalore, 0, di molteplicità algebrica 4. Calcoliamo la sua molteplicità geometrica

$$\mathrm{mg}(0) = 4 - rk \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=0} = 4 - rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq \mathrm{ma}(0)$$

E $\overline{T}$ e quindi T non è diagonalizzabile.

Proposto: Esiste n tale che T^n è diagonalizzabile?

□

Esercizio 21.83. `[NNN97a]` *Dato l'endomorfismo*

$$\begin{array}{cccc} T\colon & \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a+2b+c & b-c \\ c-d & a+b+c \end{pmatrix} \end{array}$$

determinare autovettori ed autovalori di T, e dire se T è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Soluzione. Consideriamo la base di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usiamo l'isomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \psi\colon & \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^4 \\ & M_{1,1} & \mapsto & \underline{e}_1 \\ & M_{1,2} & \mapsto & \underline{e}_2 \\ & M_{2,1} & \mapsto & \underline{e}_3 \\ & M_{2,2} & \mapsto & \underline{e}_4 \end{array}$$

Vediamo le immagini secondo T della base di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccccc} M_{1,1} & \overset{T}{\mapsto} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \overset{\psi}{\mapsto} & (1,0,0,1) \\ M_{1,2} & \overset{T}{\mapsto} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \overset{\psi}{\mapsto} & (2,1,0,1) \\ M_{2,1} & \overset{T}{\mapsto} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \overset{\psi}{\mapsto} & (1,-1,1,1) \\ M_{2,2} & \overset{T}{\mapsto} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \overset{\psi}{\mapsto} & (0,0,-1,0) \end{array}$$

e quindi in $\mathbb{R}^4$ abbiamo l'endomorfismo $\overline{T}$ associato rispetto alla base canonica alla matrice

$$(M_{\overline{T}})^{E_4}_{E_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p_{\overline{T}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 1$$

Vediamo innanzitutto la diagonalizzabilità su $\mathbb{Q}$: usando le regola delle radici razionali abbiamo che le possibili radici di $p_{\overline{T}}(\lambda)$ sono ± 1 ed abbiamo $p_{\overline{T}}(1) = -2$, $p_{\overline{T}}(-1) = 10$. Quindi $p_{\overline{T}}(\lambda)$ non ha radici razionali, e $\overline{T}$ non ha autovalori in $\mathbb{Q}$, e non è quindi diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$.

Calcoliamo $\gcd(p_{\overline{T}}(\lambda), p'_{\overline{T}}(\lambda))$ mediante la versione di Sturm dell'algoritmo euclideo.

```
P0:=x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x - 1;
P1:=Der(P0,x);P1;
//4x^3 - 9x^2 + 8x - 3;
GCDPolySTURMVerbose(P0,P1);

(x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x - 1)=(1/4x - 3/16)*(4x^3 - 9x^2 + 8x - 3)+(5/16x^2 - 3/4x - 25/16)
(4x^3 - 9x^2 + 8x - 3)=(-4/5x - 3/25)*(-5x^2 + 12x + 25)+(736/25x)
(-5x^2 + 12x + 25)=(5x - 12)*(-x)+(25)
(-x)=(x)*(-1)+(0)
lista delle coppie  [[x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x - 1, 4x^3 - 9x^2 + 8x - 3],
                     [4x^3 - 9x^2 + 8x - 3, -5x^2 + 12x + 25],
                     [-5x^2 + 12x + 25, -x],
                     [-x, -1]]
Record[GCD = -1, Sequence =
[x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x - 1, 4x^3 - 9x^2 + 8x - 3, -5x^2 + 12x + 25, -x, -1]]
```

Dato che l'ultimo elemento della sequenza è uno scalare, $\gcd(p_{\overline{T}}(\lambda), p'_{\overline{T}}(\lambda)) = 1$, che vuol dire che il polinomio è libero da quadrati. Essendo su $\mathbb{C}$, quindi, ha tutte le radici e tutte di molteplicità uno, e quindi $\overline{T}$ è diagonalizzabile.

Per la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ usiamo la sequanza di Sturm per calcolare il numero di radici reali. La sequenza è, come visto prima

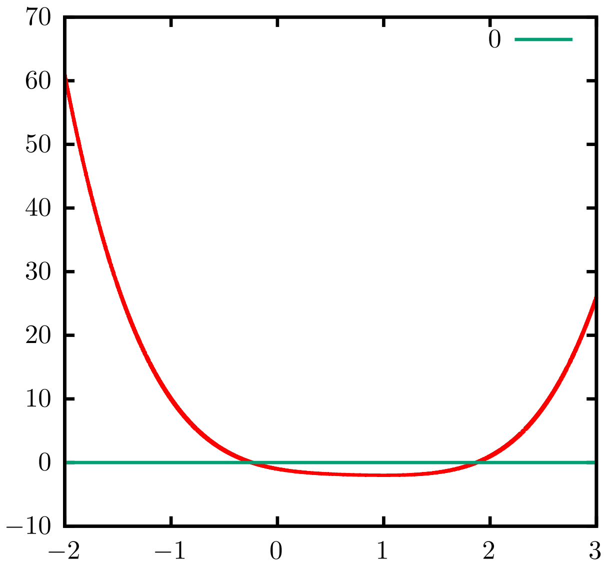
$$(\lambda^4 - 3\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 1, 4\lambda^3 - 9\lambda^2 + 8\lambda - 3, -5\lambda^2 + 12\lambda + 25, -\lambda, -1)$$

Abbiamo

$$V_- = \#[1, -4, -5, 1, -1] = 3 \text{ e } V_+ = \#[1, 4, -5, -1, -1] = 1$$

e quindi il numero di radici è $3 - 1 = 2$. Il polinomio caratteristico non ha tutte le radici nel campo e quindi $\overline{T}$ non è diagonalizzabile. Vediamo il grafico del polinomio caratteristico.

GNU10: Grafico di $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0$



Se siete curiosi di trovare la forma esatta delle soluzioni, che esiste trattandosi di un equazione di quarto grado, andate sul sito `https://www.wolframalpha.com` chiedete

```
solve x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x - 1=0
```

chiedendo la forma esatta e intuite immediatamente perchè tale soluzione esatta è utile fino ad un certo punto. □

Esercizio 21.84. [NNS80] *Dato l'endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associato dalla base canonica alla matrice*

$$(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$

1. *Calcolare gli autovalori di T.*
2. *Determinare se T è diagonalizzabile.*
3. *In caso affermativo, determinare una base di autovettori. [Lungo]*

Soluzione.

1. Il polinomio caratteristico è dato da

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - k)(\lambda^2 + 5\lambda + 3)$$

le sue radici reali, e quindi gli autovalori di T sono $0, k, \frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$

2. Per vedere se T è diagonalizzabile, distinguiamo i vari casi

(a) $k \neq 0, \frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$. Abbiamo quattro autovalori distinti su $\mathbb{R}^4$, e T è quindi diagonalizzabile.

(b) $k = 0$. Abbiamo $P_T(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + 5\lambda + 3)$, un autovalore con molteplicità algebrica due e due autovalori con molteplicità algebrica uno. Le molteplicità geometriche degli autospazi associati a questi ultimi due autovalori sono forazte ad essere anch'esse uno. Vediamo

$$\begin{aligned} \mathrm{mg}(0) &= 4 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=0,k=0} \\ &= 4 - rk \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 4 - 2 = 2 = \mathrm{ma}(0) \end{aligned}$$

dato che abbiamo una riga di zeri e la prima e seconda riga sono opposte. Quindi T è diagonalizzabile.

(c) $k = \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$. Abbiamo $p_T(\lambda) = \lambda\left(\lambda - \frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right)^2\left(\lambda - \frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right)$. Come prima, basta calcolare

$$\begin{aligned}
\operatorname{mg}\left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right) &= 4 - rk \left.\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right|_{\lambda=k=\frac{-5-\sqrt{13}}{2}} \\
&= 4 - rk \begin{pmatrix} 1-\frac{-5-\sqrt{13}}{2} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\frac{-5-\sqrt{13}}{2} & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3-\frac{-5-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e dato che abbiamo una riga e colonna nulla e che, dopo qualche conto, vediamo che

$$\det \begin{pmatrix} 1-\frac{-5-\sqrt{13}}{2} & -1 & 1 \\ -1 & 1-\frac{-5-\sqrt{13}}{2} & -1 \\ 3 & 0 & 3-\frac{-5-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} = 25\sqrt{13} + 95$$

ed il rango che cerchiamo è 3, abbiamo

$$\operatorname{mg}\left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right) = 4 - 3 = 1 \neq \operatorname{ma}\left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right)$$

e quindi per $k = \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$ T non è diagonalizzabile.

(d) $k = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$ è lasciato per esercizio.

3. Determinare una base di autovettori è lasciato per esercizio. [Lungo]

□

Esercizio 21.85. `[KL09]` *Sia* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un endomorfismo descritto da*

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema

$$T^{10}((x,y,z)) + T^3((x,y,z)) = \underline{0}$$

Soluzione. Vediamo se T è diagonalizzabile, ed in caso affermativo opereremo con la sua forma diagonale. Calcoliamo gli autovalori di T da

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = F(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Dato che

$$F(\pm 1) = F(2) = 0$$

gli autovalori sono $\pm 1, 2$ e la matrice è diagonalizzabile. Sia B una base di autovettori di T, che esiste in quanto T è diagonalizzabile. Abbiamo per esempio

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esprimiamo il sistema usando $(M_T)_B^B$

$$\begin{aligned}
T^{10}((x,y,z)) + T^3((x,y,z)) &= \underline{0} \\
\left((M_T)_B^B\right)^{10} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \left((M_T)_B^B\right)^3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \underline{0} \\
\left[\left((M_T)_B^B\right)^{10} + \left((M_T)_B^B\right)^3\right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \underline{0} \\
\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{10} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^3\right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \underline{0} \\
\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \underline{0} \\
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1032 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \underline{0}
\end{aligned}$$

Il rango della matrice è 2, quindi la dimensione delle soluzioni del sistema è 1. □

Esercizio 21.86. `[NNN50]` *Dato l'endomorfismo*

$$\begin{array}{cccc} T\colon & \mathbb{C}^4 & \to & \mathbb{C}^4 \\ & (x,y,z,t) & \mapsto & (2y, x, -t, z) \end{array}$$

Dire se è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Soluzione. Abbiamo

$$T(\underline{e}_1) = (0,1,0,0),\ T(\underline{e}_2) = (2,0,0,0),\ T(\underline{e}_3) = (0,0,0,1),\ T(\underline{e}_4) = (0,0,-1,0))$$

e quindi

$$(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico si calcola facilmente dato che si tratta di una matrice a blocchi:

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - 2)(\lambda^2 + 1)$$

$\mathbb{Q}$ Non tutte le radici sono in $\mathbb{Q}$, e quindi T non è diagonalizzabile.

$\mathbb{R}$ Non tutte le radici sono in $\mathbb{R}$, e quindi T non è diagonalizzabile.

$\mathbb{C}$ Tutte le radici sono in $\mathbb{C}$, e sono tutte distinte. Quindi T è diagonalizzabile.

Notiamo che non basta che ogni riga e colonna di una matrice abbiano un solo elemento non nullo per garantire la diagonalizzabilità dell'endormorfismo associato. □

Esercizio 21.87. [JJ93] *Dato l'endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato dalla base canonica alla matrice*

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. *Determinare il polinomio caratteristico di T.*
2. *Determinare il polinomio minimo di T.*
3. *Dire se T è diagonalizzabile.*

Dimostrazione.

1. Determiniamo il poinomio caratteristico di T

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 5-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12$$

2. Per calcolare il polinomio minimo di T fattorizziamo il polinomio caratteristico di T

$$p_T(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12$$

Procediamo con il metodo delle radici razionali. Le possibili radici sono

$$\pm 1, \pm 2 \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$$

Abbiamo

$$p_T(1) = 2 \quad p_T(-1) = 36 \quad p_T(2) = 0$$

Quindi $\lambda - 2$ è un fattore lineare di $d(\lambda)$. Dividendo $-\lambda^3+7\lambda^2-16\lambda+12$ per $\lambda-2$ otteniamo $-\lambda^2+5\lambda-6$. Fattorizziamo questo polinomio di secondo grado con la formula ed otteniamo

$$-\lambda^2 + 5\lambda - 6 = -(\lambda-2)(\lambda-3)$$

e quindi una fattorzzazione del polinomio caratteristico di T è

$$p_T(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

Dato che la il polinomio minimo deve essere monico, avere gli stessi fattori irriducibili del polinomio caratteristico e grado minore od uguale, abbiamo solo due possibilità per il polinomio minimo di T:

$$f(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3) \quad \text{e} \quad g(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

Il polinomio minimo è tra questi due quello di grado minore che viene annullato da M. Dato che

$$\begin{aligned} f(M) &= (M - 2\cdot I_3)\cdot(M - 3\cdot I_3) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} - 2\cdot I_3\right)\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} - 3\cdot I_3\right) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

il polinomio minimo di T è $(\lambda-2)(\lambda-3) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$.

3. Dato che il polinomio minimo ha tutte le radici in $\mathbb{R}$ e nessun fattore multiplo, T è diagonalizzabile.

□

Esercizio 21.88. `[KL14]` *Sia* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'endomorfismo avente come autovettori*

$$\underline{v}_1 = (1,1,0),\ \underline{v}_2 = (0,1,1),\ \underline{v}_3 = (0,0,1)$$

rispetto agli autovalori $1,1,2$*. Determinare la dimensione dell'insieme delle soluzioni dell'equazione*

$$(T^3 - 4T^2 + 6T - 3I_3)(x,y,z) = \underline{0}$$

Soluzione. Determiniamo il polinomio caratteristico di T. Vogliamo vedere se i tre autovettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ siano linearmente indipendenti. Lo sono, basta controllare che

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Abbiamo quindi tre autovettori linearmente indipendenti, e quindi una base di autovettori. Allora T è diagonalizzabile, e dato che conosciamo gli autovalori, il polinomio caratteristico è dato da

$$P_T(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$$

Sappiamo che T annulla il proprio polinomio caratteristico (Teorema di Cayley-Hamilton),

$$-T^3 + 4T^2 - 5T + 2I_3 = 0 \implies T^3 - 4T^2 + 5T - 2I_3 = 0$$

quindi l'equazione diviene

$$\begin{aligned} (T^3 - 4T^2 + 6T - 3I_3)(x,y,z) &= 0 \\ (T^3 - 4T^2 + 5T - 2I_3 + T - I_3)(x,y,z) &= 0 \\ (T - I_3)(x,y,z) &= 0 \\ ((M_T)_E^E - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \\ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

e dato che questo è un sistema omogeneo con matrice associata di rango 1, abbiamo ∞^2 soluzioni. □

Esercizio 21.89. [KL12] *Sia data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Determinare il polinomio caratteristico di A.*
2. *Calcolare $A^{317} - A^{64}$.*

Soluzione.

1. Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -3-\lambda & -2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda$$

Quindi il polinomio caratteristico di A è $P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda$.

2. Sappiamo che la matrice annulla il proprio polinomio caratteristico, quindi abbiamo che

$$P(A) = 0 \implies A^3 = A$$

Dato che $317 = 256 + 32 + 27 + 2 = 2^8 + 2^4 + 3^3 + 2$ abbiamo $A^{317} = A^{256} \cdot A^{32} \cdot A^{27} \cdot A^2$ da cui

$$\begin{aligned} A^4 &= A^3 A = A \cdot A = A^2 \\ A^8 &= \left(A^4\right)^2 = A^2 \\ A^{64} &= \left(A^8\right)^8 = (A^2)^8 = (A^8)^2 = (A^2)^2 = A^4 = A^2 \\ A^{256} &= (A^{64})^4 = (A^2)^4 = A^8 = A^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^9 &= \left(A^3\right)^3 = (A)^3 = A \\ A^{27} &= (A^9)^3 = A^3 = A \end{aligned}$$

Quindi

$$A^{317} = A^{256} \cdot A^{32} \cdot A^{27} \cdot A^2 = A^2 \cdot A^2 \cdot A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = A^3 = A$$

Quindi

$$A^{317} - A^{64} = A - A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Rimarchiamo che si possono trovare altre strade per calcolare $A^{317},\ A^{64}$.

Proposto: si può dimostrare facilmente per induzione che $A^{2^n} = A^2$ e $A^{3^n} = A$. Si veda se è possibile dare (e provare per induzione) una formula generale per A^{2n}, A^{2n+1} e A^n. □

Esercizio 21.90. `[KL06]` *Si determini la matrice A associata ad un applicazione lineare $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sapendo che T ammette gli autovalori $1, -2$ e*

$$V_1 = \mathrm{Span}((1,2)),\ V_{-2} = \mathrm{Span}((2,1))$$

Soluzione. Scegliamo di determinare la matrice $(M_T)_{E_2}^{E_2}$.

questa matrice, generica, associata a T è

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Imponiamo le due condizioni, per esempio imponendo che

$$T((1,2)) = (1,2) \text{ e } T((2,1)) = -2 \cdot (2,1)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dato che le due condizioni devono essere soddisfatte contemporaneamente, abbiamo che a, b, c, d devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ c + 2d = 2 \\ 2a + b = -4 \\ 2c + d = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a + b = -4 \\ c + 2d = 2 \\ 2c + d = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a + b = -4 \end{cases} \cup \quad \begin{cases} c + 2d = 2 \\ 2c + d = -2 \end{cases}$$

che hanno soluzioni

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = -2 \\ d = 2 \end{cases}$$

L'applicazione T è quindi associata alla matrice

$$(M_T)_{E_2}^{E_2} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Procedimento alternativo scegliendo una base che non sia E_2:

Dato che i due vettori $\underline{v}_1 = (1,2)$ e $\underline{v}_2 = (2,1)$ sono linermente indipendenti, formano una base B di $\mathbb{R}^2$. Date le condizioni , abbiamo che

$$T(\underline{v}_1) = \underline{v}_1 \text{ e } T(\underline{v}_2) = -\underline{v}_2$$

quindi

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

è la matrice associata all'applicazione secondo la base B. □

Esercizio 21.91. `[ES2122D]` *Dati $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{K}^2$ linearmente indipendenti, $a \in \mathbb{K}$ ed un endomorfismo T tale che per ogni $\underline{v}_1, \underline{v}_2$*

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K}^2 \\ & \underline{v}_1 - \underline{v}_2 & \mapsto & \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \\ & a\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 & \mapsto & \underline{v}_2 \end{array}$$

1. *Determinare gli a tali che T sia iniettivo, surgettivo, isomorfismo.*

Soluzione. Dato che $T(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$, e quindi $\underline{v}_1 - \underline{v}_2$ è autovettore di T, prendiamo come base $B = \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1$. Questi due vettori sono linearmente indipendenti dato che lo sono $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e quindi formano una base di $\mathbb{K}^2$. Vediamo di determinare l'immagine di $\underline{v}_1$. Abbiamo

$$\begin{cases} T(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \\ T(a\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2) = \underline{v}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(\underline{v}_1) - T(\underline{v}_2) = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \\ aT(\underline{v}_1) + 2T(\underline{v}_2) = \underline{v}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2T(\underline{v}_1) - 2T(\underline{v}_2) = 2\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 \\ aT(\underline{v}_1) + 2T(\underline{v}_2) = \underline{v}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2T(\underline{v}_1) - 2T(\underline{v}_2) = 2\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 \\ (a+2)T(\underline{v}_1) = 2\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = (\underline{v}_1 - \underline{v}_2) + \underline{v}_1 \end{cases}$$

Se avessimo $a = -2$, avremmo $\underline{0} = 2\underline{v}_1 - \underline{v}_2$ e $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sarebbero linearmente dipendenti, contro l'ipotesi. Quindi possiamo supporre per ipotesi che $\boxed{a \neq -2}$ e

$$T(\underline{v}_1) = \frac{1}{a+2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) + \frac{1}{a+2}\underline{v}_1$$

Date le immagini di $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1$ in base B abbiamo la matrice

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & \frac{1}{a+2} \end{pmatrix}$$

che, dato $a \neq -2$, è non singolare e quindi l'endomorfismo T è invertibile e quindi un isomorfismo e quindi iniettivo e surgettivo.

Ricapitolando: dalle ipotesi discende necessariamente che $a \neq -2$. Per tutte le $a \neq -2$ l'endomorfismo T è isomorfismo, quindi iniettivo e surgettivo. □

Esempio 21.92. `[MMM50]` *Dato l'endomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi associato alla matrice*

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinare p_T e una base di autovettori se possibile.

Soluzione: Determiniamo il polinomio caratteristico sviluppando il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

per la seconda colonna:

$$p_T(\lambda) = (2-\lambda)\cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

Gli autovalori sono $-1, 1, 2$. Determiniamo le basi degli autospazi

1. V_{-1}. Una base è data dal ker della matrice
$$\left((M_T)_{E_3}^{E_3} - (1)I_3\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
Questo mi dice che $z = 0$ e $x + y = 0 \Rightarrow x = -y$. Vettore generico $(-y, y, 0)$. Base $\underline{v}_1 = (-1, 1, 0)$.

2. V_1. Una base è data dal ker della matrice
$$\left((M_T)_{E_3}^{E_3} - (-1)I_3\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Questo mi dice che $x = 0$ e $3y + z = 0 \Rightarrow z = -3y$. Vettore generico $(0, y, -3y)$. Base $\underline{v}_2 = (0, 1, -3)$.

3. V_2. Una base è data dal ker della matrice
$$\left((M_T)_{E_3}^{E_3} - (2)I_3\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
Questo mi dice che $x = z = 0$. Vettore generico $(0, y, 0)$. Base $\underline{v}_3 = (0, 1, 0)$.

I tre vettori $\underline{v}_1 = (-1, 1, 0), \underline{v}_2 = (0, 1, -3), \underline{v}_3 = (0, 1, 0)$ sono linearmente indipendenti, dato che la matrice
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
ha rango massimo. Formano quindi una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$. Rispetto a questa base,
$$(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Volendo verificare i conti, costruiamo le matrici $(M_T)_{E_3}^{E_3}$, $M_{E_3}^{\mathcal{B}}$ e $M_{\mathcal{B}}^{E_3}$ e costruiamo $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ mediante il cambiamento di base:

```
MBE:=Mat[[-1, 0, 0],
         [1, 1, 1],
         [0, -3, 0]];

MEB:=Inverse(MBE);MEB;
Mat[[-1, 0, 0],
    [0, 0, -1/3],
    [1, 1, 1/3]];

MTEE:=Mat[[1, 0, 0],
          [1, 2, 1],
          [0, 0, -1]];

MEB*MTEE*MBE;
Mat[[1, 0, 0],
    [0, -1, 0],
    [0, 0, 2]]
```

Notiamo che le dimensioni dei ker sono sempre maggiori di 0, questo perchè se c'è un autovalore, il ker deve contenere almeno un vettore non nullo. □

Esempio 21.93. `[NNN00]` *Abbiamo l'endomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi, con $k \in \mathbb{R}$*

$$\begin{array}{cccc} T\colon & \mathbb{R}[x]_{\leq 2} & \to & \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \\ & ax^2+bx+c & \mapsto & (a+kb)x^2+(ka+b)x+kc \end{array}$$

Dire, al variare di k, se T è diagonalizzabile.

Soluzione: Poniamoci in $\mathbb{R}^3$ con l'isomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \psi\colon & \mathbb{R}[x]_{\leq 2} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & x^2 & \mapsto & \underline{e}_1 \\ & x & \mapsto & \underline{e}_2 \\ & 1 & \mapsto & \underline{e}_3 \end{array}$$

Possiamo quindi interpretare T come l'endomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \overline{T}\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (a,b,c) & \mapsto & (a+kb, ka+b, kc) \end{array}$$

ed abbiamo

$$\overline{T}(\underline{e}_1) = (1,k,0) \quad \overline{T}(\underline{e}_2) = (k,1,0) \quad \overline{T}(\underline{e}_3) = (0,0,k)$$

Quindi

$$(M_{\overline{T}})_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

e si vede facilmente, sviluppando

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & k & 0 \\ k & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & k-\lambda \end{pmatrix}$$

per la terza riga, che

$$p_{\overline{T}}(\lambda) = (k-\lambda)((1-\lambda)^2-k^2) = (k-\lambda)(1-\lambda-k)(1-\lambda+k) = -(\lambda-k)(\lambda-(1-k))(\lambda-(1+k))$$

e quindi i tre autovalori sono $k, 1-k, 1+k$.

Vediamo i vari casi

1. I tre autovalori possono essere tutti coincidenti? Vorrebbe dire che k soddisfa

$$\begin{cases} k = 1-k \\ k = 1+k \end{cases} \quad \text{che non ha soluzioni.}$$

   Quindi i tre autovalori non possono essere tutti e tre coincidenti.

2. Due soli autovalori coincidenti. Abbiamo i tre casi

(a) $k = 1 - k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$. Abbiamo

$$p_{\overline{T}} = -\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)$$

con $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ di molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ di molteplicità algebrica 1. La molteplicità geometrica di λ_2 è forzata ad essere 1. La molteplicità geometrica di $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ è

$$\left(3 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & k & 0 \\ k & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & k-\lambda \end{pmatrix}\right)_{k=\frac{1}{2},\lambda=\frac{1}{2}} = 3 - rk \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

e quindi per $k = 0$ $\overline{T}$ è diagonalizzabile.

(b) $k = 1 + k$. Impossibile.

(c) $1 - k = 1 + k \Rightarrow k = 0$. Abbiamo

$$p_{\overline{T}} = -\lambda(\lambda - 1)^2$$

con $\lambda_1 = 0$ di molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2 = 1$ di molteplicità algebrica 2. La molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 0$ è forzata ad essere 1. La molteplicità geometrica di $\lambda_2 = 1$ è

$$\left(3 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & k & 0 \\ k & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & k-\lambda \end{pmatrix}\right)_{k=0,\lambda=1} = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 2$$

e quindi per $k = 0$ l'endomorfismo $\overline{T}$ è diagonalizzabile.

3. Se $k \neq \frac{1}{2}, 0$, i tre autovalori sono tutti distinti e $\overline{T}$ (e quindi T) è diagonalizzabile.

Riassumendo, l'endomorfismo $\overline{T}$ (e quindi l'endomorfismo T) è diagonalizzabile per ogni $k \in \mathbb{R}$. □

Esercizio 21.94. `[ES03]` *Sia dato $b \in \mathbb{R}$ e il morfismo T associato alla matrice*

$$B = (M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ -b & b+1 & b \\ b & 0 & -b \end{pmatrix}$$

1. *Al variare di $b \in \mathbb{R}$ calcolare il polinomio caratteristico di T.*
2. *Esistono valori di b tali che il polinomio minimo di T abbia grado < 3?*
3. *Esistono valori di b tali che T sia diagonalizzabile?*

Soluzione.

1. Il polinomio caratteristico di T è $-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda - 1)^2$, come si può vedere sviluppando con Laplace secondo la terza riga od operando una parziale riduzione di Gauss *sulla matrice* $B - \lambda \cdot I_3$. Ricordiamo che la riduzione con Gauss della matrice B *non* dà in genere una matrice simile a B e quindi in genere il polinomio caratteristico della matrice ridotta *non è uguale* a quello della matrice di partenza.

2. Il polinomio minimo di T va cercato tra i seguenti candidati: i divisori del polinomio caratteristico che sono divisi da $\mathrm{sqfr}(-\lambda(\lambda - 1)^2) = \lambda(\lambda - 1)$:

$$\lambda(\lambda - 1), \quad \lambda(\lambda - 1)^2$$

Esaminiamo i due casi

- $PM_T(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$. Dovremmo avere
$$PM_T(B) = B \cdot (B - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$
e questo è vero se $b = 0$.

Quindi se $b = 0$ $PM_T(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$. e questo è un polinomio minimo libero da quadrati con tutte le radici in $\mathbb{R}$, e quindi in questo caso T è diagonalizzabile.

3. $PM_T(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$, e quindi $b \neq 0$: dato che il polinomio minimo non è libero da quadrati, il morfismo T non è diagonalizzabile.

□

21.11 Esercizi proposti

Esercizio 21.95. [M152] *Sia $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un applicazione $\mathbb{R}-$lineare con matrice associata*
$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Discutere la diagonalizzabilità di T al variare di k in $\mathbb{R}$.

Esercizio 21.96. [LL65] *Sia $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un applicazione $\mathbb{R}-$lineare con matrice associata*
$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
Dire se T è diagonalizzabile.

Esercizio 21.97. [LL64] *Sia*
$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x, y + 3z, x + y - z) \end{array}$$
un endomorfismo di $\mathbb{R}-$ spazi. Dire se è diagonalizzabile ed in questo caso determinere una base B tale che $(M_T)_B^B$ sia diagonale.

Esercizio 21.98. [LLL64] *Sia*
$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x, y + 3z, x + y + z) \end{array}$$
un endomorfismo di $\mathbb{R}-$ spazi. Dire se è diagonalizzabile ed in questo caso determinere una base B tale che $(M_T)_B^B$ sia diagonale.

Esercizio 21.99 (Difficile)**.** [LL89] *Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice*
$$A = \begin{pmatrix} 3 - k & -1 & 0 \\ k & 2 & k \\ 0 & 1 & 3 - k \end{pmatrix}$$
Per quali valori di k l'endomorfismo associato ad A dalla base canonica è diagonalizzabile?