

Capitolo 18

Lezione Diciottesima

18.1 Esercizi svolti

Esempio 18.1. [GGQ50] Dato $(x + y, x - y, z, t + u)$ vettore generico di $W \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^4$ abbiamo

$$(x + y, x - y, z, t + u) = x(1, 1, 0, 0) + y(1, -1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1) + u(0, 0, 0, 1)$$

ed un sistema di generatori di W è

$$(1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1)$$

Avendo $(1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1)$ costruiamo un vettore generico

$$x(1, 1, 0, 0) + y(1, -1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1) + u(0, 0, 0, 1) = (x + y, x - y, z, t + u)$$

Esempio 18.2. [GGQ70] Dato $W = \text{Span}(x + 3, x^2 - 1, 5) \in \mathbb{Q}[x]_{\leq 2}$ un suo vettore (polinomio) generico è

$$a(x + 3) + b(x^2 - 1) + c5 = bx^2 + ax + 3a - b + 5c$$

Esempio 18.3. [GGQ45] Dato $W = \text{Span}((1, 1, 3), (0, 0, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 3))$ un vettore generico di $W \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^3$ è

$$x(2, 1, 3) + y(0, 0, 1) + z(1, 1, 1) + t(2, 1, 3) = (2x + z + 2t, x + z + t, 3x + y + z + 3t)$$

con $x, y, z, t \in \mathbb{K}$

Esempio 18.4. [GGQ95] Un vettore generico di $W \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^3$ è (x, y, z) con $x, y, z \in \mathbb{K}$

Esercizio 18.5. [GGB20] Completiamo i vettori $\underline{w}_1 = (1, 2, 1, 0, 2)$, $\underline{w}_2 = (1, 2, 3, 2, 1)$, $\underline{w}_3 = (1, 2, 1, 0, 1)$ a base di $\mathbb{R}^5$ con vettori della base canonica E_5 .

Soluzione. Riduciamo a scala la matrice

```
A:=Mat([[1,2,1,0,2],
        [1,2,3,2,1],
        [1,2,1,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
```

```

----- [1, 2, 1, 0, 2]
      2^a-1*1^a [0, 0, 2, 2, -1]
      3^a-1*1^a [0, 0, 0, 0, -1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 3]=2
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 0, 2]
----- [0, 0, 2, 2, -1]
      0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, -1]

```

Il risultato è la matrice S . Questo mi dice che A_1, A_2, A_3 sono linearmente indipendenti e che

$$\text{Span}(A_1, A_2, A_3) = \text{Span}(S_1, S_2, S_3)$$

Scegliamo tra i vettori di E_5 quelli le cui entrate non nulle non coincidono con una colonna con pivot, ovvero e_2, e_4 . Vogliamo provare che i vettori w_1, w_2, w_3, e_2, e_4 sono base di $\mathbb{K}^5$.

I vettori S_1, S_2, S_3, e_2, e_4 sono linearmente indipendenti, dato che se li mettiamo come righe nella matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

questa è non singolare - basta sviluppare il determinante con Laplace per la quarta e quinta riga per ridursi a calcolare il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che è banalmente non nullo. Quindi, trattandosi di cinque vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{K}^5$, sono una base di $\mathbb{K}^5$. □

Esempio 18.6. [HHH68] *Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$*

$$V = \text{Span}((1, 1, 1, 1), (2, 1, 3, 3), (1, -1, 3, 3)) \text{ e } W = \text{Span}((3, 2, 4, 4), (1, 1, 2, 2))$$

determinare una base di $V + W$.

Dimostrazione. Svolgiamo, per esercizio, i conti sia per righe che per colonne.

- Procediamo per righe

```

M:=Mat([[1,1,1,1],
        [2,1,3,3],
        [1,-1,3,3],
        [3,2,4,4],
        [1,1,2,2]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 1]
      2^a-2*1^a [0, -1, 1, 1]

```

```

3^a-1*1^a [0, -2, 2, 2]
4^a-3*1^a [0, -1, 1, 1]
5^a-1*1^a [0, 0, 1, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 1]
----- [0, -1, 1, 1]
3^a-2*2^a [0, 0, 0, 0]
4^a-1*2^a [0, 0, 0, 0]
0 sotto pivot[0, 0, 1, 1]
Potrei fermarmi qui ma continuo per avere una matrice a scala
cambio la 3^a e la 5^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 1, 1, 1],
     [0, -1, 1, 1],
     [0, 0, 1, 1],
     [0, 0, 0, 0],
     [0, 0, 0, 0]])

```

Una base di $V + W$ è data da $B = (1, 1, 1, 1), (0, -1, 1, 1), (0, 0, 1, 1)$, le righe con pivot della matrice ridotta. Avrei potuto dirlo anche prima di fare lo scambio di righe per trovare la riduzione a scala.

Un'altra base è data dalla prima, seconda e quinta riga della matrice M , $B_1(1, 1, 1, 1), (2, 1, 3, 3), (1, 1, 2, 2)$, ricordandomi che ho scambiato la terza e quinta riga durante la riduzione.

Se vogliamo una base ancora più semplice possiamo mettere la matrice in forma standard.

```

Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 1, 1, 1]
2^a*-1 [0, 1, -1, -1]
----- [0, 0, 1, 1]
----- [0, 0, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 0]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
1^a-1*3^a [1, 1, 0, 0]
2^a--1*3^a [0, 1, 0, 0]
----- [0, 0, 1, 1]
----- [0, 0, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 0]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
1^a-1*2^a [1, 0, 0, 0]
----- [0, 1, 0, 0]
----- [0, 0, 1, 1]
----- [0, 0, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 0]

```

Un'altra base di $V + W$ è $B_2 = (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)$.

- Procediamo per colonne

```
M1:=Mat([[1, 2, 1, 3, 1],
```

```

      [1, 1, -1, 2, 1],
      [1, 3, 3, 4, 2],
      [1, 3, 3, 4, 2]]);
RiduciScalaVerbose(M1);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 3, 1]
      2^a-1*1^a [0, -1, -2, -1, 0]
      3^a-1*1^a [0, 1, 2, 1, 1]
      4^a-1*1^a [0, 1, 2, 1, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 3, 1]
----- [0, -1, -2, -1, 0]
      3^a+1*2^a [0, 0, 0, 0, 1]
      4^a+1*2^a [0, 0, 0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 5]=1
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 3, 1]
----- [0, -1, -2, -1, 0]
----- [0, 0, 0, 0, 1]
      4^a-1*3^a [0, 0, 0, 0, 0]

```

I pivot della ridotta sono nella prima, seconda e quinta colonna. Una base di $V + W$ è data dalla prima, seconda e quinta colonna della matrice M : $(1, 1, 1, 1), (2, 1, 3, 3), (1, 1, 2, 2)$.

Ricordiamo che le colonne della matrice ridotta non necessariamente generano $V + W$, o in generale lo Span delle colonne della matrice di partenza. Per esempio in questo caso le colonne della ridotta hanno sempre 0 nell'ultima componente, e una loro combinazione lineare non può generare per esempio $(1, 1, 1, 1)$, la prima colonna di M , che ha l'ultima componente non nulla.

□

Esempio 18.7. [GGG28]

$$\begin{aligned}
 \text{Span}_{\mathbb{C}} \left(\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ i \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) &= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ i \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5\alpha \\ i\alpha \\ 7\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ 3\beta \\ 2\beta \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} \beta \\ 5\alpha + 3\beta \\ i\alpha + 2\beta \\ 7\alpha + \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathbb{Q}^3
 \end{aligned}$$

Esempio 18.8. [GGG61] In $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ il vettore $x^3 + 2x - 1$ si scrive

- $(1, 0, 2, -1)_B$ rispetto alla base $B = x^3, x^2, x, 1$.
- $(-1, 2, 0, 1)_{B_1}$ rispetto alla base $B_1 = 1, x, x^2, x^3$.
- $(1, 0, 2, \frac{6}{5})_{B_2}$ rispetto alla base $B_2 = x^3 - 1, x^2 + x, x - 3, 5$ dato che

$$x^3 + 2x - 1 = \boxed{1}(x^3 - 1) + \boxed{0}(x^2 + x) + \boxed{2}(x - 3) + \boxed{\frac{6}{5}}(5)$$

[Verificare per esercizio che B_2 sia base]

Esempio 18.9. [GGG62] In $\mathcal{F} = \{F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ sia dato $V = \text{Span}(x, e^x, \sin^2 x, 1)$ di base $B = x, e^x, \sin^2 x, 1$. Il vettore $5x + \sin^2 x$ si scrive come

- $(5, 0, 1, 0)_B$ rispetto alla base B .
- $(1, 0, -1, 2)_{B'}$ rispetto alla base $B' = 5x, e^x, \cos^2 x, \frac{1}{2}$ dato che

$$5x + \sin^2 x = 1 \cdot (5x) + 0 \cdot (e^x) - 1 \cdot (\cos^2 x) + 2 \cdot \frac{1}{2}$$

Per esercizio, verificare che B, B' siano basi di V .

Esempio 18.10. [HHH02] L $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale $\mathbb{C}$ ha $\mathbb{R}$ -base $1, i$ ed ha $\mathbb{R}$ -dimensione 2 ($\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$), ovvero $\mathbb{C}$ ha dimensione 2 come $\mathbb{R}$ -spazio.

Soluzione. Che $1, i$ generino è immediato, dato che ogni $z \in \mathbb{C}$ si può scrivere in forma cartesiana $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Per l'indipendenza lineare, vediamo che

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot i = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

per il principio di identità dei complessi in forma cartesiana, □

Esempio 18.11. [KK12] Abbiamo i due $\mathbb{R}$ -sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$

$$V = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$W = \{(2x + y, 6x + 4y, 4x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

È vero che $V \subseteq W$? $V \supseteq W$? $V = W$?

Soluzione. Innanzitutto, per evitare confusioni con i nomi delle variabili, cambiamo la descrizione di W in

$$W = \{(2x' + y', 6x' + 4y', 4x' + y') \mid x', y' \in \mathbb{R}\}$$

Rispondiamo alle prime due domande. Se la risposta per entrambe è affermativa, allora $V = W$, altrimenti no.

- $V \subseteq W$ Questa domanda equivale a chiedersi se ogni elemento di V stia in W . Dato che ogni elemento di V si può scrivere come $(x, 2x, 3x)$ per un qualche $x \in \mathbb{R}$, mentre ogni elemento di W si può scrivere come $(2x' + y', 6x' + 4y', 4x' + y')$ con $x', y' \in \mathbb{R}$, questo equivale a chiedersi

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists x', y' \in \mathbb{R} \text{ t.c. } (x, 2x, 3x) = (2x' + y', 6x' + 4y', 4x' + y')$$

ovvero stiamo cercando di vedere se il sistema lineare nelle incognite x', y' (legate a $\exists$) e nel parametro x (legato a $\forall$)

$$(2x' + y', 6x' + 4y', 4x' + y') = (x, 2x, 3x) \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} 2x' + y' = x \\ 6x' + 4y' = 2x \\ 4x' + y' = 3x \end{cases}$$

ha soluzioni. Creiamo la matrice completa associata al sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 6 & 4 & 2x \\ 4 & 1 & 3x \end{array} \right)$$

e riduciamola con Gauss.

```
Use R:=Q[x];
M:=Mat([[2,1,x],[6,4,2x],[4,1,3x]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 1, x]
      2^a-3*1^a [0, 1, -x]
      3^a-2*1^a [0, -1, x]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 1, x]
----- [0, 1, -x]
      3^a+1*2^a [0, 0, 0]
```

Dato che l'ultima riga si è cancellata, questo è un sistema di 2 equazioni in 2 incognite, in forma triangolare superiore con pivot non nulli. Ha quindi una ed una sola soluzione, il che ci dice che $V \subseteq W$.

- $W \subseteq V$ Questa domanda equivale a chiedersi se ogni elemento di W stia in V . Dato che ogni elemento di V si può scrivere come $(x, 2x, 3x)$ per un qualche $x \in \mathbb{R}$, mentre ogni elemento di W si può scrivere come $(2x' + y', 6x' + 4y', 4x' + y')$ con $x', y' \in \mathbb{R}$, questa equivale a chiedersi

$$\forall x', y' \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } (2x' + y', 6x' + 4y', 4x' + y') = (x, 2x, 3x)$$

ovvero stiamo cercandoci vedere se il sistema nell' incognita x (legata a $\exists$) e nei parametri x', y' (legati a $\forall$)

$$(x, 2x, 3x) = (2x' + y', 6x' + 4y', 4x' + y') \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = 2x' + y' \\ 2x = 6x' + 4y' \\ 3x = 4x' + y' \end{cases}$$

ha soluzioni. Risolviamo prendendo $x = 2x' + y'$ e sostituendo nella seconda e terza equazione. Otteniamo

$$\begin{cases} x = 2x' + y' \\ -2x' - 2y' = 0 \\ 2x' + 2y' = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = 2x' + y' \\ x' + y' = 0 \end{cases}$$

e dalla seconda equazione risulta che esistono soluzioni non per tutte le x', y' , ma solo se $x' + y' = 0$. Quindi per esempio, non ci sono soluzioni per $x' = 1, y' = 0$. Quindi $W \not\subseteq V$

Dato che $V \subseteq W$ ma $W \not\subseteq V$ abbiamo che $V \neq W$ □

Provare per esercizio a procedere nel modo seguente: vedere se i vettori di una base di V stiano in W (che mi darebbe $V \subseteq W$) e trovare un vettore di W che non appartiene a V (che mi darebbe $W \not\subseteq V$).

Esercizio 18.12. [HHQ70] *Dati i due sottospazi di $\mathbb{K}^5$*

$$W_1 = \text{Span}((1, 1, 1, 1, 3), (2, 1, 3, 3, 2)) \text{ e } W_2 = \text{Span}((1, 2, 4, 4, 2), (2, -3, 1, 1, 4), (4, 1, 7, 7, 0))$$

determinare una base di $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$.

```
M:=Mat([[1, 2, 1, 2, 4],
        [1, 1, 2, -3, 1],
        [1, 3, 4, 1, 7],
        [1, 3, 4, 1, 7],
        [3, 2, 2, 4, 0]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 2, 4]
      2^a-1*1^a [0, -1, 1, -5, -3]
      3^a-1*1^a [0, 1, 3, -1, 3]
      4^a-1*1^a [0, 1, 3, -1, 3]
      5^a-3*1^a [0, -4, -1, -2, -12]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 2, 4]
----- [0, -1, 1, -5, -3]
      3^a+1*2^a [0, 0, 4, -6, 0]
      4^a+1*2^a [0, 0, 4, -6, 0]
      5^a-4*2^a [0, 0, -5, 18, 0]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=4
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 2, 4]
----- [0, -1, 1, -5, -3]
----- [0, 0, 4, -6, 0]
      4^a-1*3^a [0, 0, 0, 0, 0]
      5^a+5/4*3^a [0, 0, 0, 21/2, 0]
Scambio la 4^a e la 5^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 2, 1, 2, 4],
     [0, -1, 1, -5, -3],
     [0, 0, 4, -6, 0],
     [0, 0, 0, 21/2, 0],
     [0, 0, 0, 0, 0]])
```

Dato che i pivot sono nelle prime quattro colonne della matrice ridotta, una base di $V + W$ è data dalle prime quattro colonne della matrice di partenza, quindi da

$$(1, 1, 1, 1, 3), (2, 1, 3, 3, 2), (1, 2, 4, 4, 2), (2, -3, 1, 1, 4)$$

Un vettore generico di W è dato da

$$a(1, 2, 4, 4, 2) + b(2, -3, 1, 1, 4) + c(4, 1, 7, 7, 0)$$

Se imponiamo le condizioni date dalle righe della matrice con le prime due componenti nulle (le equazioni che coinvolgono solo le variabili a, b, c)

$$[0, 0, 4, -6, 0] \longrightarrow 4a - 6b = 0 \quad [0, 0, 0, 21/2, 0] \longrightarrow 21/2b = 0$$

ovvero $a = 3/2b$, $b = 0 \Rightarrow a = b = 0$ otteniamo un vettore generico di $V \cap W$

$$0(1, 2, 4, 4, 2) + 0(2, -3, 1, 1, 4) + c(4, 1, 7, 7, 0)$$

da cui un sistema di generatori di $V \cap W$ è $c(4, 1, 7, 7, 0)$ e quindi una base di $V \cap W$ è $(4, 1, 7, 7, 0)$.

Esercizio 18.13. [KL13a] Dati i due sottospazi di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

$$M = \text{Span}(x^3 - 1, 2x^2 + x, x^2 + x + 1)$$

$$N = \text{Span}(2x^3 - 6x^2 - 3x - 2, 3x^3 - 4x^2 - 2x - 3, x^3 + 3x^2 + 2x)$$

Determinare

- $\dim(M)$, $\dim(N)$.
- $\dim(M \cap N)$.
- Una base di $M \cap N$.

Soluzione: scriviamo i polinomi con le loro coordinate rispetto alla base $1, x, x^2, x^3$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

Con un piccolo abuso di notazione, denotiamo M e N come

$$M = \text{Span}(\underline{u}_1 = (1, 0, 0, -1), \underline{u}_1 = (0, 2, 1, 0), \underline{u}_1 = (0, 1, 1, 1))$$

$$N = \text{Span}(\underline{v}_1 = (2, -6, -3, -2), \underline{v}_2 = (3, -4, -2, -3), \underline{v}_3 = (1, 3, 2, 0))$$

- Calcoliamo $\dim(N)$, poi dedurremo $\dim(M)$ facendo i conti per il calcolo di una base di $M \cap N$. Costruiamo una matrice le cui colonne sono i generatori di N riduciamola e vediamo il rango (ricordiamo che il numero di righe e di colonne linearmente indipendenti è uguale, e quindi la dimensione di N si può calcolare indifferentemente dal rango della matrice che ha per righe o per colonne i generatori di N).

```

N:=Mat[[ 2, 3, 1],
        [-6,-4, 3],
        [-3,-2, 2],
        [-2,-3, 0]];
L:=RiduciScalaVerbose(N);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 3, 1]
      2^a+3*1^a [0, 5, 6]
      3^a+3/2*1^a [0, 5/2, 7/2]
      4^a+1*1^a [0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=5
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 3, 1]

```

```

----- [0, 5, 6]
      3^a-1/2*2^a [0, 0, 1/2]
      0 sotto pivot[0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=1/2
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 3, 1]
----- [0, 5, 6]
----- [0, 0, 1/2]
      4^a-2*3^a [0, 0, 0]

```

dato che ci sono tre pivot, i tre generatori iniziali di N (e anche quelli dati dalle colonne della matrice finale) sono linearmente indipendenti e $\dim(N) = 3$.

- Per calcolare $\dim(M)$ e $\dim(N + M)$, da cui calcoleremo $\dim(M \cap N)$, costruiamo la matrice le cui colonne sono i generatori di M e quelli di N e riduciamola con Gauss

```

MN:=Mat[[ 1, 0, 0, 2, 3, 1],
         [ 0, 2, 1, -6, -4, 3],
         [ 0, 1, 1, -3, -2, 2],
         [-1, 0, 1, -2, -3, 0]];
L:=RiduciScalaVerbose(MN);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 0, 0, 2, 3, 1]
      0 sotto pivot[0, 2, 1, -6, -4, 3]
      0 sotto pivot[0, 1, 1, -3, -2, 2]
      4^a+1*1^a [0, 0, 1, 0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 0, 0, 2, 3, 1]
----- [0, 2, 1, -6, -4, 3]
      3^a-1/2*2^a [0, 0, 1/2, 0, 0, 1/2]
      0 sotto pivot[0, 0, 1, 0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=1/2
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 0, 0, 2, 3, 1]
----- [0, 2, 1, -6, -4, 3]
----- [0, 0, 1/2, 0, 0, 1/2]
      4^a-2*3^a [0, 0, 0, 0, 0, 0]

```

Dato che ci sono tre pivot, $\dim(M + N) = 3$. Dato che nelle prime tre colonne, quelle relative a M , ci sono tre pivot, le tre colonne sono linearmente indipendenti e quindi $\dim(M) = 3$. quindi, per la formula di Grassman

$$\dim(M \cap N) = \dim(M) + \dim(N) - \dim(M + N) = 3 + 3 - 3 = 3$$

quindi $\dim(M \cap N) = 3$.

- Dato che $M \supseteq M \cap N$ e $\dim(M) = \dim(M \cap N) = 3$, abbiamo che $M = M \cap N$, e quindi ogni base di M , per esempio

$$(x^3 - 1, 2x^2 + x, x^2 + x + 1)$$

che è base perchè genera M ed ha tanti elementi quanto la dimensione di M è uguale alla dimensione di $M \cap N$.

□

Esercizio 18.14. [EE8a] Siano dati i due $\mathbb{R}$ sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

$$U = \text{Span}(x^3 + x^2 + 7x + 2, x^3 + 2x^2 + 31x + 1, x)$$

$$W = \text{Span}(2x^3 + 16x + 8, x^3 - x^2 + 21x + 6, x)$$

- Determinare una base per U e una base per W .
- Determinare $\dim(U + W)$, $\dim(U \cap W)$.
- Dato il sottoinsieme di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

$$V_1 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a^2 = b^2\}$$

determinare $(U \cap W) \cap V_1$.

Soluzione. Notiamo immediatamente che $x \in U, V$ e quindi $x \in U \cap V$, quindi $\dim U \cap V \geq 1$.

Con un lieve abuso di notazione, denotiamo i vettori di U, W con le loro coordinate rispetto alla base $1, x, x^2, x^3$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$:

$$U = \text{Span}(\underline{u}_1 = (1, 1, 7, 2), \underline{u}_2 = (1, 2, 31, 1), \underline{u}_3 = (0, 0, 1, 0))$$

$$V = \text{Span}(\underline{v}_1 = (2, 0, 16, 8), \underline{v}_2 = (1, -1, 21, 6), \underline{v}_2 = (0, 0, 1, 0))$$

Scegliamo di trovare innanzitutto le dimensioni di U, W

- Determinare una base per U e una base per W . Per determinare una base di U controlliamo se i tre vettori che lo generano sono linearmente indipendenti calcolando il rango della matrice (vettori $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ per riga)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 31 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è facile vedere che la sottomatrice

$$A_{(1,2,3);(1,2,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 31 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è non singolare, sviluppando il determinante con Laplace secondo la terza riga. I vettori $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ sono quindi linearmente indipendenti, $\dim U = 3$, e una base di U è

$$(1, 1, 0, 2), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 0) \quad \text{ovvero} \quad x^3 + x^2 + 2, x^2 - 1, x$$

Per determinare una base di W controlliamo se i vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ che lo generano sono linearmente indipendenti calcolando il rango della matrice (vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ per riga)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 16 & 8 \\ 1 & -1 & 21 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La sottomatrice $B_{(1,2,3);(1,2,4)}$ è non singolare, e quindi il rango di B è 3, i vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ sono linearmente indipendenti, $\dim W = 3$, una base di W è

$$(1, 0, 0, 4), (0, -1, 0, 2), (0, 0, 1, 0) \quad \text{ovvero} \quad x^3 + 4, -x^2 + 2, x$$

- Determinare $\dim(U + W)$, $\dim(U \cap W)$.

Per determinare $\dim(U + W)$ calcoliamo il rango della matrice le cui righe sono i vettori delle basi di U e W , che scegliamo al posto degli originali generatori perchè sono più semplici

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La sottomatrice

$$C_{(1,2,3,4);(1,2,3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

è non singolare, dato che sviluppando il determinante secondo Laplace per la terza riga otteniamo,

$$\begin{aligned} \det(C_{(1,2,3,4);(1,2,3,4)}) &= 1 \cdot \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right) \\ &= 1 \cdot \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) + 4 \cdot \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= (-1 - 2) + 4(1) \neq 0 \end{aligned}$$

Il rango della matrice è quindi 4, $\dim(U + W) = 4$ e per la formula di Grassman abbiamo che

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - 4 = 3 + 3 - 4 = 2$$

- Dato il sottoinsieme di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

$$V_1 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a^2 = b^2\}$$

determinare $(U \cap W) \cap V_1$.

L'insieme V_1 non è lineare. Esprimendo i polinomi in base $B = x^3, x^2, x, 1$

$$V_1 = \{(a, b, c, d)_B \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 = b^2\}$$

L'intersezione $U \cap W$ ha dimensione 2, ed è un piano di $\mathbb{R}^4$ con un vettore generico (conosciamo già una sua base)

$$\alpha(1, 1, 0, 2) + \beta(0, 0, 1, 0) = (\alpha, \alpha, \beta, 2\alpha)$$

o se preferite

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \beta \\ t = 2\alpha \end{cases}$$

La condizione di appartenenza di questo vettore generico a V_1 è $\alpha^2 = \alpha^2$, sempre verificata. Quindi il vettore generico di $U \cap W$ appartiene a V_1 , quindi ogni vettore di $U \cap W$ appartiene a V_1 e quindi l'insieme V_1 contiene $U \cap W$ e

$$(U \cap W) \cap V_1 = U \cap W$$

□

Vediamo un esercizio in spazi di dimensione alta, con molti conti. Non ci saranno esercizi così computazionalmente pesanti in un compito.

Esercizio 18.15. [III44] *Dati*

$$V = \text{Span}((1, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 4, 6, 8), (1, 1, -3, 6, 9, 12))$$

$$W = \text{Span}((1, 1, 0, 2, 3, 5), (2, 2, 0, 2, 3, 5), (1, 1, 1, 0, 0, 1))$$

Determinare dimensioni e basi per $V, W, V + W, V \cap W$.

Soluzione: Ricordiamo che il metodo prevede di uguagliare dei vettori generici di V, W per determinare le condizioni da porre al vettore generico di W per appartenere anche a V e quindi a $V \cap W$. Ovvero cercare le $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui esiste la relazione

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero di risolvere il sistema nelle variabili x, y, z, a, b, c , di cui però siamo interessati solo alle soluzioni in a, b, c soltanto (alle relazioni tra a, b, c).

```
V:=Mat([[1,1,1,1,1,1],
        [1,1,2,4,6,8],
        [1,1,-3,6,9,12]]);
W:=Mat([[1,1,0,2,3,5],
        [2,2,0,2,3,5],
        [1,1,1,0,0,1]]);
VW:=BlockMat([V],[W]);VW;
Mat[
  [1, 1, 1, 1, 1, 1],
  [1, 1, 2, 4, 6, 8],
  [1, 1, -3, 6, 9, 12],
  [1, 1, 0, 2, 3, 5],
  [2, 2, 0, 2, 3, 5],
  [1, 1, 1, 0, 0, 1]]
VW:=Transposed(VW);VW;
Mat[
  [1, 1, 1, 1, 2, 1],
  [1, 1, 1, 1, 2, 1],
  [1, 2, -3, 0, 0, 1],
  [1, 4, 6, 2, 2, 0],
  [1, 6, 9, 3, 3, 0],
  [1, 8, 12, 5, 5, 1]]
-- Questa e' la matrice associata al sistema che stiamo considerando;
-- le colonne sono i generatori di V, W
RiduciScalaVerbose(VW);
```

Ho trovato il pivot in posizione $A[1, 1]=1$
 Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot

```

----- [1, 1, 1, 1, 2, 1]
      2a-1*1a [0, 0, 0, 0, 0, 0]
      3a-1*1a [0, 1, -4, -1, -2, 0]
      4a-1*1a [0, 3, 5, 1, 0, -1]
      5a-1*1a [0, 5, 8, 2, 1, -1]
      6a-1*1a [0, 7, 11, 4, 3, 0]
  
```

Scambio la 2^a e la 3^a riga
 Adesso la matrice e'

```

Mat[[1, 1, 1, 1, 2, 1],
     [0, 1, -4, -1, -2, 0],
     [0, 0, 0, 0, 0, 0],
     [0, 3, 5, 1, 0, -1],
     [0, 5, 8, 2, 1, -1],
     [0, 7, 11, 4, 3, 0]]
  
```

Ho trovato il pivot in posizione $A[2, 2]=1$
 Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot

```

----- [1, 1, 1, 1, 2, 1]
----- [0, 1, -4, -1, -2, 0]
      0 sotto pivot [0, 0, 0, 0, 0, 0]
      4a-3*2a [0, 0, 17, 4, 6, -1]
      5a-5*2a [0, 0, 28, 7, 11, -1]
      6a-7*2a [0, 0, 39, 11, 17, 0]
  
```

Scambio la 3^a e la 4^a riga
 Adesso la matrice e'

```

Mat[[1, 1, 1, 1, 2, 1],
     [0, 1, -4, -1, -2, 0],
     [0, 0, 17, 4, 6, -1],
     [0, 0, 0, 0, 0, 0],
     [0, 0, 28, 7, 11, -1],
     [0, 0, 39, 11, 17, 0]]
  
```

Ho trovato il pivot in posizione $A[3, 3]=17$
 Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot

```

----- [1, 1, 1, 1, 2, 1]
----- [0, 1, -4, -1, -2, 0]
----- [0, 0, 17, 4, 6, -1]
      0 sotto pivot [0, 0, 0, 0, 0, 0]
      5a-28/17*3a [0, 0, 0, 7/17, 19/17, 11/17]
      6a-39/17*3a [0, 0, 0, 31/17, 55/17, 39/17]
  
```

Scambio la 4^a e la 5^a riga
 Adesso la matrice e'

```

Mat[[1, 1, 1, 1, 2, 1],
     [0, 1, -4, -1, -2, 0],
     [0, 0, 17, 4, 6, -1],
     [0, 0, 0, 7/17, 19/17, 11/17],
     [0, 0, 0, 0, 0, 0],
     [0, 0, 0, 31/17, 55/17, 39/17]]
  
```

Ho trovato il pivot in posizione $A[4, 4]=7/17$
 Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot

```

----- [1, 1, 1, 1, 2, 1]
----- [0, 1, -4, -1, -2, 0]
----- [0, 0, 17, 4, 6, -1]
----- [0, 0, 0, 7/17, 19/17, 11/17]
    0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 0, 0]
    6^a-31/7*4^a [0, 0, 0, 0, -12/7, -4/7]
Scambio la 5^a e la 6^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[[1, 1, 1, 1, 2, 1],
     [0, 1, -4, -1, -2, 0],
     [0, 0, 17, 4, 6, -1],
     [0, 0, 0, 7/17, 19/17, 11/17],
     [0, 0, 0, 0, -12/7, -4/7],
     [0, 0, 0, 0, 0, 0]]
Ho trovato il pivot in posizione A[5, 5]=-12/7
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 1, 2, 1]
----- [0, 1, -4, -1, -2, 0]
----- [0, 0, 17, 4, 6, -1]
----- [0, 0, 0, 7/17, 19/17, 11/17]
----- [0, 0, 0, 0, -12/7, -4/7]
    0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 0, 0]

```

Ricordiamo che le prime tre colonne (generatori di V) sono associate alle variabili x, y, z , che compaiono nella descrizione generica di V . Ricordiamo che le ultime tre colonne (generatori di W) sono associate alle variabili a, b, c , che compaiono nella descrizione generica di W . Quindi le relazioni tra a, b, c sono

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 7/17a + 19/17b + 1/17c = 0 \\ -12/7b - 4/7c = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 7a + 19b + c = 0 \\ 3b + c = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 7a + 19b - 3b = 0 \\ c = -3b \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 7a + 16b = 0 \\ c = -3b \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{16}{7}b \\ c = -3b \end{cases}
 \end{aligned}$$

Abbiamo un vettore generico di W

$$\begin{aligned}
 a(1, 1, 0, 2, 3, 5) + b(2, 2, 0, 2, 3, 5) + c(1, 1, 1, 0, 0, 1) &= \\
 &= (a + 2b + c, a + 2b + c, c, 2a + 2b, 3a + 3b, 5a + 5b + c)
 \end{aligned}$$

Imponiamo le relazioni $a = -\frac{16}{7}b$, $c = -3b$

$$\left(\left(-\frac{16}{7}b \right) + 2b - 3b, \left(-\frac{16}{7}b \right) + 2b - 3b, -3b, 2 \left(-\frac{16}{7}b \right) + 2b, \quad 3 \left(-\frac{16}{7}b \right) + 3b, \right. \\ \left. 5 \left(-\frac{16}{7}b \right) + 5b - 3b \right) =$$

$$= \left(-\frac{23}{7}b, -\frac{23}{7}b, -3b, -\frac{18}{7}b, -\frac{27}{7}b, -\frac{66}{7}b \right) = \frac{b}{7}(-23b, -23b, -21b, -18b, -27b, -66b)$$

quindi

- $\dim V \cap W = 1$ e una sua base è

$$(-23, -23, -21, -18, -27, -66) \quad \text{o} \quad (23, 23, 21, 18, 27, 66)$$

- $\dim V = 3$ (tre pivot nelle colonne dei generatori di V); i suoi generatori sono anche sua base.
- $\dim V + W = 5$ (cinque pivot); una base è data dai generatori di V e dai primi due generatori di W .
- Da Grassman, $\dim W = \dim(V + W) + \dim V \cap W - \dim V = 5 + 1 - 3 = 3$. Quindi una base di W (che non abbiamo calcolato) è comunque data dai suoi tre generatori.

□

Esercizio 18.16. [IIB01] *Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$*

$$M = \text{Span}((1, 0, 1, 2), (2, 0, 1, 1), (-1, 0, 1, 4))$$

$$N = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z + t = 0\}$$

Determinare dimensioni e basi per $M, N, M + N, M \cap N$.

Soluzione: Strategia: imponiamo ad un vettore generico di M le condizioni di appartenenza a N . Estrarremo un sistema di generatori dal vettore generico di $M \cap N$ ottenuto, ed una base da questo.

- Un vettore generico di M è

$$\underline{v} = x(1, 0, 1, 2) + y(2, 0, 1, 1) + z(-1, 0, 1, 4)$$

- Le condizioni di appartenenza a N sono immediatamente leggibili dalla sua descrizione, ma per evitare confusioni riscriviamo

$$N = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z + t = 0\} \text{ come } \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b + c + d = 0\}$$

la condizione di appartenenza di un vettore a N è quindi $b + c + d = 0$ (la somma delle sue ultime tre componenti è nulla)

- Imponiamo questa condizione al vettore generico di M : $(x + 2y - z, 0, x + y + z, 2x + y + 4z)$. otteniamo

$$(0) + (x + y + z) + (2x + y + 4z) = 0 \Rightarrow 3x + 2y + 5z = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}y - \frac{5}{3}z$$

- Un vettore generico di $M \cap N$ è quindi

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2}{3}y - \frac{5}{3}z\right)(1, 0, 1, 2) + y(2, 0, 1, 1) + z(-1, 0, 1, 4) &= (8/3y - 8/3z, 0, 5/3y - 2/3z, 7/3y + 2/3z) \\ &= y(8/3, 0, 5/3, 7/3) + z(-8/3, 0, -2/3, 2/3) \end{aligned}$$

Un sistema di generatori di $M \cap N$ è quindi $(8/3, 0, 5/3, 7/3), (-8/3, 0, -2/3, 2/3)$ o anche se preferiamo, $(8, 0, 5, 7), (8, 0, 2, -2)$. Si vede immediatamente che questa è anche base (in questo caso). $\dim M \cap N = 2$

- La dimensione di N è chiaramente 3 (una sola condizione in uno spazio di dimensione 4). Per avere una base, vediamo che l'insieme delle soluzioni di $y + z + t = 0 \Leftrightarrow y = -z - t$ è (in $\mathbb{R}^4$)

$$\{(x, -z - t, z, t) = x(1, 0, 0, 0) + y(0, -1, 1, 0) + z(0, -1, 0, 1) \mid x, z, t \in \mathbb{R}\}$$

ed una base è quindi $(1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)$.

- Calcoliamo la dimensione di M . Il rango della matrice che ha i generatori di M per colonna:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

è 2, dato che l'unica sottomatrice 3×3 che non sia ovviamente singolare,

$$A_{(1,2,3);(1,3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ha comunque determinante nullo. Quindi $\dim M = 2$. Dato che $M \subseteq M \cap N$ e $\dim M = \dim M \cap N = 2$ abbiamo $M = M \cap N \Rightarrow N \supset M$. Quindi $M + N = N$ ed una base di $M + N$ è data dai generatori di N .

- Prova del nove: controlliamo con Grassman che le cose tornino:

$$\begin{aligned} \dim M + N &= \dim M + \dim N - \dim M \cap N \\ 3 &= 2 + 3 - 2 \end{aligned}$$

□

Esempio 18.17. [HHQ99] *Dati i sottospazi U, W generati rispettivamente dalle righe delle matrici A, B , determinare $\dim U$, $\dim W$, $\dim U + W$ ed una base di $U \cap W$ al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$*

```
A:=Mat([[1,2,1,3,5],
        [2,4,3,1,0],
        [0,2,2,2,2]]);
B:=Mat([[1,1,1,1,0],
        [3, 8, 6, 6, 7],
```

```

      [-1, 2, 2a, 2, a]]);
AB:=BlockMat([[A],[B]]);AB;
AB:=Transposed(AB);AB;
RiduciScalaVerbose(AB);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 3, -1]
      2^a-2*1^a [0, 0, 2, -1, 2, 4]
      3^a-1*1^a [0, 1, 2, 0, 3, 2a + 1]
      4^a-3*1^a [0, -5, 2, -2, -3, 5]
      5^a-5*1^a [0, -10, 2, -5, -8, a + 5]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 2, 0, 1, 3, -1],
      [0, 1, 2, 0, 3, 2a + 1],
      [0, 0, 2, -1, 2, 4],
      [0, -5, 2, -2, -3, 5],
      [0, -10, 2, -5, -8, a + 5]])
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 3, -1]
----- [0, 1, 2, 0, 3, 2a + 1]
0 sotto pivot[0, 0, 2, -1, 2, 4]
      4^a+5*2^a [0, 0, 12, -2, 12, 10a + 10]
      5^a+10*2^a [0, 0, 22, -5, 22, 21a + 15]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=2
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 3, -1]
----- [0, 1, 2, 0, 3, 2a + 1]
----- [0, 0, 2, -1, 2, 4]
      4^a-6*3^a [0, 0, 0, 4, 0, 10a - 14]
      5^a-11*3^a [0, 0, 0, 6, 0, 21a - 29]
Ho trovato il pivot in posizione A[4, 4]=4
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 3, -1]
----- [0, 1, 2, 0, 3, 2a + 1]
----- [0, 0, 2, -1, 2, 4]
----- [0, 0, 0, 4, 0, 10a - 14]
      5^a-3/2*4^a [0, 0, 0, 0, 0, 6a - 8]

```

Leggiamo i risultati dalla matrice ridotta:

- Se $a \neq 4/3$: ho cinque pivot nella ridotta, di cui tre nelle prime tre colonne, quindi $\dim U = 3$ e $\dim U + W = 5$. Imponiamo al vettore generico di W

$$x(1, 1, 1, 1, 0) + y(3, 8, 6, 6, 7) + z(-1, 2, 2a, 6, 9a)$$

le condizioni che ci derivano dalle righe con le prime tre componenti nulle ricordando $a \neq 4/3$:

$$\begin{cases} 4x + (10a - 14)z = 0 \\ (6a - 8)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e quindi un vettore generico di $U \cap W$ è $y(3, 8, 6, 6, 7)$, una base $(3, 8, 6, 6, 7)$, e $\dim(U \cap W) = 1$ e per Grassman $\dim W = 3$. Avremmo potuto calcolare separatamente la dimensione di W , ma ci viene gratis dai conti già fatti.

- Se $a = 4/3$ la matrice diviene

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 11/3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ho quattro pivot nella ridotta, di cui tre nelle prime tre colonne, quindi $\dim U = 3$ e $\dim U + W = 4$. Imponiamo al vettore generico di W

$$x(1, 1, 1, 1, 0) + y(3, 8, 6, 6, 7) + z(-1, 2, 2a, 6, 9a)$$

le condizioni che ci derivano dalle righe con le prime tre componenti nulle

$$4x - 2/3z = 0 \Leftrightarrow x = 1/6z$$

Otteniamo un vettore generico di $U \cap W$

$$\frac{z}{6}(1, 1, 1, 1, 0) + y(3, 8, 6, 6, 7) + z(-1, 2, 8/3, 6, 12) = y(3, 8, 6, 6, 7) + z(1, 2, 8/3, 6, 12)$$

Quindi $(3, 8, 6, 6, 7), (1, 2, 8/3, 6, 12)$, che sono ovviamente indipendenti, generano $U \cap W$ e ne sono quindi base. Abbiamo $\dim(U \cap W) = 2$ e quindi, per Grassman, $\dim W = 3$. Come prima, avremmo potuto calcolare separatamente la dimensione di W , ma ci viene gratis dai conti già fatti.

Esercizio 18.18. [HHA00] Dire se i tre sottospazi di R^7

$$W_1 = \text{Span}((1, 2, 0, 0, 0, 1, 2), (1, 1, 1, 2, 2, 3, 3))$$

$$W_2 = \text{Span}((3, 2, 0, 0, 0, 1, 1), (1, 2, 3, 3, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0))$$

$$W_3 = \text{Span}((2, 4, 3, 3, 2, 2, 2), (3, 2, 0, 1, 1, 2, 1))$$

sono in somma diretta.

Soluzione. Vediamo facilmente che $\dim W_1 = \dim W_3 = 2$. Dato che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha per righe i generatori di W_3 ha la sottomatrice $A_{(1,2,3);(4,5,7)}$ non singolare, ha rango 3, le righe sono linearmente indipendenti e quindi $\dim W_3 = 2$. La dimensione attesa di $W_1 + W_2 + W_3$ perchè esso sia somma diretta è 7. Vediamo

```
M1:=Mat([[1,2,0,0,0,1,2],[1,1,1,2,2,3,3]]);
M2:=Mat([[3,2,0,0,0,1,1],[1,2,3,3,2,1,0],[0,0,0,1,1,1,0]]);
M3:=Mat([[2,4,3,3,2,2,2],[3,2,0,1,1,2,1]]);
M:=BlockMatrix([M1],[M2],[M3]);
```

```

M:=Mat([[1, 2, 0, 0, 0, 1, 2],
        [1, 1, 1, 2, 2, 3, 3],
        [3, 2, 0, 0, 0, 1, 1],
        [1, 2, 3, 3, 2, 1, 0],
        [0, 0, 0, 1, 1, 1, 0],
        [2, 4, 3, 3, 2, 2, 2],
        [3, 2, 0, 1, 1, 2, 1]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 0, 0, 1, 2]
      2^a-1*1^a [0, -1, 1, 2, 2, 2, 1]
      3^a-3*1^a [0, -4, 0, 0, 0, -2, -5]
      4^a-1*1^a [0, 0, 3, 3, 2, 0, -2]
0 sotto pivot [0, 0, 0, 1, 1, 1, 0]
      6^a-2*1^a [0, 0, 3, 3, 2, 0, -2]
      7^a-3*1^a [0, -4, 0, 1, 1, -1, -5]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 0, 0, 1, 2]
----- [0, -1, 1, 2, 2, 2, 1]
      3^a-4*2^a [0, 0, -4, -8, -8, -10, -9]
0 sotto pivot [0, 0, 3, 3, 2, 0, -2]
0 sotto pivot [0, 0, 0, 1, 1, 1, 0]
0 sotto pivot [0, 0, 3, 3, 2, 0, -2]
      7^a-4*2^a [0, 0, -4, -7, -7, -9, -9]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-4
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 0, 0, 1, 2]
----- [0, -1, 1, 2, 2, 2, 1]
----- [0, 0, -4, -8, -8, -10, -9]
      4^a+3/4*3^a [0, 0, 0, -3, -4, -15/2, -35/4]
0 sotto pivot [0, 0, 0, 1, 1, 1, 0]
      6^a+3/4*3^a [0, 0, 0, -3, -4, -15/2, -35/4]
      7^a-1*3^a [0, 0, 0, 1, 1, 1, 0]
Ho trovato il pivot in posizione A[4, 4]=-3
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 0, 0, 1, 2]
----- [0, -1, 1, 2, 2, 2, 1]
----- [0, 0, -4, -8, -8, -10, -9]
----- [0, 0, 0, -3, -4, -15/2, -35/4]
      5^a+1/3*4^a [0, 0, 0, 0, -1/3, -3/2, -35/12]
      6^a-1*4^a [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
      7^a+1/3*4^a [0, 0, 0, 0, -1/3, -3/2, -35/12]

```

Una riga tra le sette righe della matrice si riduce a 0 , quindi possiamo dire subito che $\dim W_1 + W_2 + W_3 < 7$ e la somma non può essere diretta.

Potevamo fare il conto mettendo i vettori per colonna

```
M1:=Mat([[1,2,0,0,0,1,2],[1,1,1,2,2,3,3]]);
```

```

M2:=Mat([[3,2,0,0,0,1,1],[1,2,3,3,2,1,0],[0,0,0,1,1,1,0]]);
M3:=Mat([[2, 4, 3, 3, 2, 2, 2],[3, 2, 0, 1, 1, 2, 1]]);
M:=Transposed(BlockMatrix([[M1],[M2],[M3]]));
M:=Mat([[1, 1, 3, 1, 0, 2, 3],
        [2, 1, 2, 2, 0, 4, 2],
        [0, 1, 0, 3, 0, 3, 0],
        [0, 2, 0, 3, 1, 3, 1],
        [0, 2, 0, 2, 1, 2, 1],
        [1, 3, 1, 1, 1, 2, 2],
        [2, 3, 1, 0, 0, 2, 1]]);

```

```
RiduciScalaVerbose(M);
```

```
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
```

```
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
```

```

----- [1, 1, 3, 1, 0, 2, 3]
      2^a-2*1^a [0, -1, -4, 0, 0, 0, -4]
    0 sotto pivot[0, 1, 0, 3, 0, 3, 0]
    0 sotto pivot[0, 2, 0, 3, 1, 3, 1]
    0 sotto pivot[0, 2, 0, 2, 1, 2, 1]
      6^a-1*1^a [0, 2, -2, 0, 1, 0, -1]
      7^a-2*1^a [0, 1, -5, -2, 0, -2, -5]

```

```
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
```

```
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
```

```

----- [1, 1, 3, 1, 0, 2, 3]
----- [0, -1, -4, 0, 0, 0, -4]
      3^a+1*2^a [0, 0, -4, 3, 0, 3, -4]
      4^a+2*2^a [0, 0, -8, 3, 1, 3, -7]
      5^a+2*2^a [0, 0, -8, 2, 1, 2, -7]
      6^a+2*2^a [0, 0, -10, 0, 1, 0, -9]
      7^a+1*2^a [0, 0, -9, -2, 0, -2, -9]

```

```
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-4
```

```
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
```

```

----- [1, 1, 3, 1, 0, 2, 3]
----- [0, -1, -4, 0, 0, 0, -4]
----- [0, 0, -4, 3, 0, 3, -4]
      4^a-2*3^a [0, 0, 0, -3, 1, -3, 1]
      5^a-2*3^a [0, 0, 0, -4, 1, -4, 1]
      6^a-5/2*3^a [0, 0, 0, -15/2, 1, -15/2, 1]
      7^a-9/4*3^a [0, 0, 0, -35/4, 0, -35/4, 0]

```

```
Ho trovato il pivot in posizione A[4, 4]=-3
```

```
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
```

```

----- [1, 1, 3, 1, 0, 2, 3]
----- [0, -1, -4, 0, 0, 0, -4]
----- [0, 0, -4, 3, 0, 3, -4]
----- [0, 0, 0, -3, 1, -3, 1]
      5^a-4/3*4^a [0, 0, 0, 0, -1/3, 0, -1/3]
      6^a-5/2*4^a [0, 0, 0, 0, -3/2, 0, -3/2]
      7^a-35/12*4^a [0, 0, 0, 0, -35/12, 0, -35/12]

```

```
Ho trovato il pivot in posizione A[5, 5]=-1/3
```

```
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
```

```
----- [1, 1, 3, 1, 0, 2, 3]
```

```

----- [0, -1, -4, 0, 0, 0, -4]
----- [0, 0, -4, 3, 0, 3, -4]
----- [0, 0, 0, -3, 1, -3, 1]
----- [0, 0, 0, 0, -1/3, 0, -1/3]
6^a-9/2*5^a [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
7^a-35/4*5^a [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]

```

Dato che abbiamo 5 pivot, $\dim W_1 + W_2 + W_3 = 5$.

Potevamo anche calcolare il rango di M con altri metodi.....

□

Esercizio 18.19. [HHA01] *Dire se i tre sottospazi di R^7*

$$W_1 = \text{Span}((1, 2, 0, 0, 0, 1, 2), (1, 1, 1, 2, 2, 3, 3))$$

$$W_2 = \text{Span}((3, 2, 0, 0, 0, 1, 1), (1, 2, 3, 3, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0))$$

$$W_3 = \text{Span}((2, 0, 3, 3, 0, 2, 0), (2, 2, 0, 1, 1, 2, 1))$$

sono in somma diretta:

Soluzione: Come per l'esercizio 18.18, si vede facilmente che $\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 3$, $\dim W_3 = 2$.

```

M1:=Mat([[1,2,0,0,0,1,2],[1,1,1,2,2,3,3]]);
M2:=Mat([[3,2,0,0,0,1,1],[1,2,3,3,2,1,0],[0,0,0,1,1,1,0]]);
M3:=Mat([[2,0,3,3,0,2,0],[2,2,0,1,1,2,1]]);
M:=BlockMatrix([M1],[M2],[M3]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 0, 0, 1, 2]
2^a-1*1^a [0, -1, 1, 2, 2, 2, 1]
3^a-3*1^a [0, -4, 0, 0, 0, -2, -5]
4^a-1*1^a [0, 0, 3, 3, 2, 0, -2]
0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, 1, 1, 0]
6^a-2*1^a [0, -4, 3, 3, 0, 0, -4]
7^a-2*1^a [0, -2, 0, 1, 1, 0, -3]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 0, 0, 1, 2]
----- [0, -1, 1, 2, 2, 2, 1]
3^a-4*2^a [0, 0, -4, -8, -8, -10, -9]
0 sotto pivot[0, 0, 3, 3, 2, 0, -2]
0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, 1, 1, 0]
6^a-4*2^a [0, 0, -1, -5, -8, -8, -8]
7^a-2*2^a [0, 0, -2, -3, -3, -4, -5]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-4
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 0, 0, 1, 2]
----- [0, -1, 1, 2, 2, 2, 1]
----- [0, 0, -4, -8, -8, -10, -9]

```

```

4^a+3/4*3^a [0, 0, 0, -3, -4, -15/2, -35/4]
0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, 1, 1, 0]
6^a-1/4*3^a [0, 0, 0, -3, -6, -11/2, -23/4]
7^a-1/2*3^a [0, 0, 0, 1, 1, 1, -1/2]
Ho trovato il pivot in posizione A[4, 4]=-3
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 0, 0, 1, 2]
----- [0, -1, 1, 2, 2, 2, 1]
----- [0, 0, -4, -8, -8, -10, -9]
----- [0, 0, 0, -3, -4, -15/2, -35/4]
5^a+1/3*4^a [0, 0, 0, 0, -1/3, -3/2, -35/12]
6^a-1*4^a [0, 0, 0, 0, -2, 2, 3]
7^a+1/3*4^a [0, 0, 0, 0, -1/3, -3/2, -41/12]
Ho trovato il pivot in posizione A[5, 5]=-1/3
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 0, 0, 1, 2]
----- [0, -1, 1, 2, 2, 2, 1]
----- [0, 0, -4, -8, -8, -10, -9]
----- [0, 0, 0, -3, -4, -15/2, -35/4]
----- [0, 0, 0, 0, -1/3, -3/2, -35/12]
6^a-6*5^a [0, 0, 0, 0, 0, 11, 41/2]
7^a-1*5^a [0, 0, 0, 0, 0, 0, -1/2]
Ho trovato il pivot in posizione A[6, 6]=11
Cancello la 6^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 0, 0, 1, 2]
----- [0, -1, 1, 2, 2, 2, 1]
----- [0, 0, -4, -8, -8, -10, -9]
----- [0, 0, 0, -3, -4, -15/2, -35/4]
----- [0, 0, 0, 0, -1/3, -3/2, -35/12]
----- [0, 0, 0, 0, 0, 11, 41/2]
0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 0, 0, -1/2]

```

Abbiamo 7 pivot, quindi $\dim W_1 + W_2 + W_3 = 7 = \dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3$ e la somma è quindi diretta. $\square$

Esercizio 18.20. [HHA02] Dati $W_1, W_2, W_3 \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^7$,

$$W_1 = \text{Span}((1, 2, 0, 0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 2, 2, 3, 0))$$

$$W_2 = \text{Span}((0, 2, 0, 1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 2, 1, 0), (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0))$$

$$W_3 = \text{Span}((1, 0, 2, 3, 0, 2, 0), (0, 2, 1, 1, 1, 2, 0))$$

dire se $W_1 + W_2 + W_3$ sono in somma diretta:

Soluzione: È immediato che $\dim W_2 = \dim W_3 = 2$. Per calcolare $\dim W_2$ vediamo il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che è 3 in quanto la sottomatrice $A_{(1,2,3);(1,2,3)}$ è non singolare.

Quindi il rango atteso è $2+3+2=7$. Notiamo però che tutti i generatori dei W_i hanno ultima componente nulla. Quindi tutti e tre sono sottospazi di $\{(x, y, z, t, a, b, c) \in \mathbb{R}^7 \mid c = 0\}$ che ha dimensione 6 e quindi $W_1 + W_2 + W_3$ ha dimensione al più 6, e la somma non può essere diretta. $\square$

Esempio 18.21. [HHA18] *Vogliamo determinare una base dell'intersezione degli spazi*

$$W_1 = \text{Span}((1, 1, 0, 1, 1), (2, 3, 4, 2, 1), (0, -1, -4, 1, 1))$$

$$W_2 = \text{Span}((1, 1, 1, 1, 2), (1, 0, 1, 1, 0), (1, 3, 8, 0, 0))$$

Soluzione: Col metodo dei vettori generici

```

W1:=Mat([[1,1,0,1,1],[2,3,4,2,1],[0, -1, -4, 1,1]]);
W2:=Mat([[1,1,1,1,2],[1, 0, 1, 1,0],[1, 3, 8, 0,0]]);
M:=BlockMat([[Transposed(W1),Transposed(W2)]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 1, 1]
      2^a-1*1^a [0, 1, -1, 0, -1, 2]
    0 sotto pivot[0, 4, -4, 1, 1, 8]
      4^a-1*1^a [0, 0, 1, 0, 0, -1]
      5^a-1*1^a [0, -1, 1, 1, -1, -1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 1, 1]
----- [0, 1, -1, 0, -1, 2]
      3^a-4*2^a [0, 0, 0, 1, 5, 0]
    0 sotto pivot[0, 0, 1, 0, 0, -1]
      5^a+1*2^a [0, 0, 0, 1, -2, 1]
Scambio la 3^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[[1, 2, 0, 1, 1, 1],
     [0, 1, -1, 0, -1, 2],
     [0, 0, 1, 0, 0, -1],
     [0, 0, 0, 1, 5, 0],
     [0, 0, 0, 1, -2, 1]]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 1, 1]
----- [0, 1, -1, 0, -1, 2]
----- [0, 0, 1, 0, 0, -1]
    0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, 5, 0]
    0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, -2, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[4, 4]=1
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 1, 1]
----- [0, 1, -1, 0, -1, 2]
----- [0, 0, 1, 0, 0, -1]
----- [0, 0, 0, 1, 5, 0]
      5^a-1*4^a [0, 0, 0, 0, -7, 1]

```

Questo ci dice che le relazioni tra le variabili a, b, c sono

$$\begin{cases} a + 5b = 0 \\ -7b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5b \\ c = 7b \end{cases}$$

e che quindi la dimensione dell'intersezione è 1 (#variabili-#condizioni indipendenti) e che il vettore generico dell'intersezione è

$$\begin{aligned} a(1, 1, 1, 1, 2) + b(1, 0, 1, 1, 0) + c(1, 3, 8, 0, 0) &= -5b(1, 1, 1, 1, 2) + b(1, 0, 1, 1, 0) + 7b(1, 3, 8, 0, 0) \\ &= (3b, 16b, 52b, -4b, -10b) \end{aligned}$$

e quindi una base di $W_1 \cap W_2$ è $(3, 16, 52, -4, -10)$. Quindi $\dim W_1 \cap W_2 = 1$. Leggiamo dalla matrice $\dim W_1 + W_2 = 5$ e $\dim W_1 = 3$ (le prime tre colonne sono linearmente indipendenti). Quindi $\dim W_2 = 3$. Notiamo che comunque NON abbiamo una base di W_2 , mentre abbiamo le basi di W_1 , (i tre generatori), $W_1 + W_2$ (i tre generatori di W_1 e i primi due di W_2) e un sistema di generatori di $W_1 \cap W_2$, da cui abbiamo estratto una base. $\square$

18.2 Esercizi proposti

Esercizio 18.22. [LL93] *Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^5$*

$$\begin{aligned} U &= \text{Span}(\underline{u}_1 = (1, 2, 1, 0, 3), \underline{u}_2 = (0, -2, 0, 1, -3), \underline{u}_3 = (2, 10, 2, -3, 15)) \\ W &= \text{Span}(\underline{w}_1 = (2, 1, 0, 1, 0), \underline{w}_2 = (3, 5, 1, 0, 6), \underline{w}_3 = (5, 6, 1, 1, 1), \underline{w}_4 = (0, 9, 2, -4, 14)) \end{aligned}$$

determinare una base di $U \cap W$.

Soluzione. La dimensione di $U \cap W$ è 2. $\square$

Esercizio 18.23. [HHQ98] *Dati i sottospazi generati rispettivamente dalle righe delle matrici A, B , determinare $\dim U$, $\dim W$, $\dim U + W$ ed una base di $U \cap W$ al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$*

```
A:=Mat([ [0,0,1,0,5,0],
          [1,0,1,1,0,0],
          [2, 0, 0, -2, 15, 0] ]);
B:=Mat([ [1, 0, 2, 1, 5, 0],
          [3, 0, 2, -1, 20, 0],
          [5, 0, 2, -3a, 35a, 0] ]);
```

Sol: In ogni caso, $\dim U = 3$

- Se $a \neq 1$: $\dim W = 3$, $\dim U+W = 4$, $\dim U \cap W = 2$ ed una base di $U \cap W$ è $(1, 0, 2, 1, 5, 0), (3, 0, 2, -1, 20, 0)$.
- Se $a = 1$: $\dim W = 3$, $U = W$ $\dim U + W = 3$, $\dim U \cap W = 3$ e una base di $U \cap W$ è data dai generatori di W .

Esercizio 18.24. [HHH67] *Sia $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\}$*

$$W_1 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = f(i) = 0\} \text{ e } W_2 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(2) = f(i) = 0\}$$

Determinare

$$W_1 \cap W_2 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(i) = f(1) = f(2) = 0\}$$

Esercizio 18.25. [HHH34] Sia $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\}$

$$W_1 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = f(i)\} \text{ e } W_2 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(i) = f(3)\}$$

Determinare $W_1 \cap W_2$.

Osservazione 18.26. [HHH40] Notiamo che se $W_1, W_2, W_3 \subseteq V$ $\mathbb{K}$ -spazio, in genere non è vero che

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2 + W_3) &= \dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 + \\ &\quad - \dim(W_1 \cap W_2) - \dim(W_1 \cap W_3) - \dim(W_2 \cap W_3) + \\ &\quad + \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3) \end{aligned}$$

[Proposto]: trovare un esempio non banale dove quanto sopra è vero ed un esempio dove quanto sopra è falso.

Esercizio 18.27. [MK11] Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$$U = \text{Span}(x^2 + 1, 3x - 2) \text{ e } W = \text{Span}(x^2 + 3x - 1, x^2 - 3x + 1)$$

Dire se la loro somma è diretta.

Soluzione: No

□

Esercizio 18.28. [HHH99] Dati i sottospazi generati rispettivamente dalle righe delle matrici A, B , determinare $\dim U$, $\dim W$, $\dim U + W$ ed una base di $U \cap W$ nei seguenti casi

1. $A := \text{Mat}([[1, 2, 1, 3, 5], [2, 4, 3, 1, 0], [0, 2, 2, 2, 2]])$;
 $B := \text{Mat}([[1, 1, 1, 1, 0], [3, 8, 6, 6, 7], [-1, 2, 2, 6, 9]])$;

Soluzione: $\dim U = 3$, $\dim W = 3$, $\dim U + W = 4$, $\dim U \cap W = 2$

2. $A := \text{Mat}([[0, 4, 1, 0, 5], [2, 2, 3, 0, 0], [0, 2, 1, 0, 1]])$;
 $B := \text{Mat}([[3, 2, 5, 1, 0], [1, 0, 2, 1, 0], [-1, 2, 2, 6, 9]])$;

Soluzione: $\dim U = 3$, $\dim W = 3$, $\dim U + W = 5$, $\dim U \cap W = 1$

3. $A := \text{Mat}([[0, 0, 1, 0, 5], [1, 0, 0, 1, 0], [0, 2, 1, 0, -1]])$;
 $B := \text{Mat}([[1, 0, 2, 1, 10], [2, -6, -2, 2, 8], [1, 2, 1, 0, 0]])$;

Soluzione: $\dim U = 3$, $\dim W = 3$, $\dim U + W = 4$, $\dim U \cap W = 2$

4. $A := \text{Mat}([[0, 0, 1, 0, 5, 0],$
 $[1, 0, 0, 1, 0, 0],$
 $[-2, 0, 3, -2, 15, 0]]);$
 $B := \text{Mat}([[1, 0, 2, 1, 10, 0],$
 $[3, 2, 5, 2, 20, 0],$
 $[1, 2, 1, 0, 0, 0]]);$

Soluzione: $\dim U = 2, \dim W = 2, \dim U + W = 2, \dim U \cap W = 1$

5. $A := \text{Mat}([[0, 0, 1, 0, 5, 0],$
 $[1, 0, 1, 1, 0, 0],$
 $[-2, 0, 3, -2, 15, 0]]);$
 $B := \text{Mat}([[1, 0, 2, 1, 10, 0],$
 $[3, 0, 5, 0, 20, 0],$
 $[1, 0, 1, 0, 0, 0]]);$

Soluzione: $\dim U = 3, \dim W = 3, \dim U + W = 4, \dim U \cap W = 2$

6. $A := \text{Mat}([[0, 0, 1, 0, 5, 0],$
 $[1, 0, 1, 1, 0, 0],$
 $[2, 0, 0, -2, 15, 0]]);$
 $B := \text{Mat}([[1, 0, 2, 1, 5, 0],$
 $[3, 0, 2, -1, 20, 0],$
 $[5, 0, 2, -3, 35, 0]]);$

Soluzione: $\dim U = 3, \dim W = 2, \dim U + W = 3, \dim U \cap W = 2$

Esercizio 18.29. [HHZ98] *Ripetere l'esercizio precedente prendendo gli spazi generati dalle colonne delle matrici*

Esercizio 18.30. [IID00] *Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^6$*

$$M = \text{Span}((1, 0, 1, 2, 2, 0), (2, 0, 1, 1, 1, 1), (-1, 0, 1, 0, 4, 2))$$

$$N = \text{Span}((0, 2, 1, 3, 2, 3), (1, 0, 1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1, 4, 1))$$

Determinare dimensioni e basi per $M, N, M + N, M \cap N$.

Esercizio 18.31. [IID01] *Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^3$*

$$M = \text{Span}((1, 2, 1), (2, 3, 1), (-4, -5, -1))$$

$$N = \text{Span}((5, 2, 1), (1, 3, 1), (7, -5, -1))$$

Determinare dimensioni e basi per $M, N, M + N, M \cap N$.

Esercizio 18.32. [IID03] *Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$*

$$M = \text{Span}((1, 0, 1, 1), (2, 0, 1, 1), (-1, 0, 1, 1))$$

$$N = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z - t = 0\}$$

Determinare dimensioni e basi per $M, N, M + N, M \cap N$.

Esercizio 18.33. [IID04] *Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$*

$$M = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z = y + z + t = 0\}$$

$$N = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z + t = 0\}$$

Determinare dimensioni e basi per $M, N, M + N, M \cap N$.