

Capitolo 19

Diciannovesima lezione

19.1 Definizione ed esempi di morfismo

Definizione 19.1. [III01] Siano V, W $\mathbb{K}$ -spazi e $F: V \rightarrow W$ una funzione. Se

- $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ abbiamo che $F(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = F(\underline{v}_1) + F(\underline{v}_2)$ (additività, chiusura sulla somma)
- $\forall \underline{v} \in V, \lambda \in \mathbb{K}$ abbiamo che $f(\lambda \underline{v}) = \lambda F(\underline{v})$ (omogeneità, chiusura sul prodotto esterno)

diciamo che la funzione $F: V \rightarrow W$ è lineare o morfismo (o morfismo di $\mathbb{K}$ -spazi o applicazione $\mathbb{K}$ -lineare se vogliamo specificare gli scalari).

Proposizione 19.2. [III02] Siano V, W $\mathbb{K}$ -spazi e $F: V \rightarrow W$ una funzione. La funzione F è lineare se e solo se

$$\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V. \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \text{ abbiamo che } F(\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2) = \lambda_1 F(\underline{v}_1) + \lambda_2 F(\underline{v}_2)$$

Dimostrazione. Ovvio. □

Corollario 19.3. [III21] Data una funzione lineare $F: V \rightarrow W$

1. $F(\underline{0}) = \underline{0}$.
2. $\forall \underline{v} \in V \quad F(-\underline{v}) = -F(\underline{v})$

Dimostrazione. Immediata, lasciata per esercizio. □

Esempio 19.4. [III13] Dati V $\mathbb{K}$ -spazio e $\mathcal{B} = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base di V ,

1. La funzione coordinate

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{B}}: \quad V &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ \underline{v} &\mapsto \underline{\alpha} \end{aligned}$$

dove $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{\alpha} \cdot \underline{v}$ è ben definita e lineare.

2. La funzione

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{K}^n &\rightarrow V \\ \underline{\alpha} &\mapsto \underline{\alpha} \cdot \underline{v} \end{aligned} \quad \text{con } \underline{\alpha} \cdot \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$$

è lineare ed è l'inversa di $F_{\mathcal{B}}$, che è quindi bigettiva.

Dimostrazione. Dipende immediatamente dalle proprietà di unicità di rappresentazione delle basi □

Esempio 19.5. [III22] *La funzione*

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x^2, x + y, x) \end{aligned}$$

non è lineare, dato che

$$\begin{aligned} F((1, 1) + (1, 1)) &= F((2, 2)) = (4, 4, 2) \\ &\text{ma} \\ F((1, 1)) + F((1, 1)) &= (1, 2, 1) + (1, 2, 1) = (2, 4, 2) \end{aligned}$$

Esempio 19.6. [III09] *La funzione nulla*

$$\begin{aligned} F: \quad V &\rightarrow W \\ \underline{v} &\mapsto \underline{0} \end{aligned}$$

è lineare.

Esempio 19.7. [III10] *La funzione identità*

$$\begin{aligned} F: \quad V &\rightarrow V \\ \underline{v} &\mapsto \underline{v} \end{aligned}$$

è lineare.

Esempio 19.8. [III04] *La funzione*

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto mx \end{aligned}$$

è lineare, dato che

$$F(ax + by) = m(ax + by) = amx + bmy = aF(x) + bF(y)$$

Esempio 19.9. [II04] *La funzione*

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto mx + 3 \end{aligned}$$

non è lineare, dato che $F(0) = 3 \neq 0$.

Esempio 19.10. [III03] *La funzione*

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y) \end{aligned}$$

è lineare.

Dimostrazione. Usiamo la definizione.

$$\begin{aligned} F(\alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2)) &= F((\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)) \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta y_1 - \alpha x_2 - \beta y_2) \\ &= \alpha(x_1 + x_2, x_1 - x_2) + \beta(y_1 + y_2, y_1 - y_2) \\ &= \alpha F((x_1, y_1)) + \beta F((x_2, y_2)) \end{aligned}$$

□

19.2 Nucleo e immagine

Definizione-Proposizione 19.11. [III19] Dato un morfismo di $\mathbb{K}$ -spazi $T: V \rightarrow W$

1. L'insieme $\ker T = \{\underline{v} \in V \mid T(\underline{v}) = \underline{0}\}$ è detto nucleo di T ed è un sottospazio di V .
2. L'insieme $\operatorname{Im} T = \{T(\underline{v}) \mid \underline{v} \in V\}$ è detto immagine di T ed è un sottospazio di W . Definiamo $\operatorname{rk} T = \dim \operatorname{Im} T$.

Dimostrazione.

1. Dobbiamo verificare la chiusura per somma e prodotto esterno. Verifichiamo la prima lasciando la seconda per esercizio.

Siano $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in \operatorname{Im} F$, dobbiamo dimostrare che $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in \operatorname{Im} F$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\underline{w}_1 \in \operatorname{Im} F &\Leftrightarrow \exists \underline{v}_1 \in V \text{ t.c. } F(\underline{v}_1) = \underline{w}_1 \\ \underline{w}_2 \in \operatorname{Im} F &\Leftrightarrow \exists \underline{v}_2 \in V \text{ t.c. } F(\underline{v}_2) = \underline{w}_2\end{aligned}$$

e quindi

$$\underline{w}_1 + \underline{w}_2 = F(\underline{v}_1) + F(\underline{v}_2) = F(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \Rightarrow \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in \operatorname{Im} F$$

2. Dobbiamo verificare che se $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \ker F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ allora

$$\lambda \underline{v}_1 + \mu \underline{v}_2 \in \ker F \Leftrightarrow F(\lambda \underline{v}_1 + \mu \underline{v}_2) = \underline{0}$$

Infatti

$$F(\lambda \underline{v}_1 + \mu \underline{v}_2) = \lambda F(\underline{v}_1) + \mu F(\underline{v}_2) = \lambda \underline{0} + \mu \underline{0} = \underline{0}$$

dato che $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \ker F \Leftrightarrow F(\underline{v}_1) = F(\underline{v}_2) = \underline{0}$.

□

Richiamo 19.12. [IIZ70] Ricordiamo che una funzione $f: A \rightarrow B$ è iniettiva se e solo se

$$\forall x, y \in A \quad f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$$

Proposizione 19.13. [III53] Sia $F: V \rightarrow W$ un morfismo di $\mathbb{K}$ spazi. Allora F è iniettivo se e solo se $\ker F = \{\underline{0}\}$.

Dimostrazione.

1. Dimostriamo che se $\ker F = \{\underline{0}\}$ allora F è iniettivo.

Dobbiamo dimostrare che $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V \quad F(\underline{v}_1) = F(\underline{v}_2) \Leftrightarrow \underline{v}_1 = \underline{v}_2$

Abbiamo

$$\begin{aligned}F(\underline{v}_1) = F(\underline{v}_2) &\Leftrightarrow F(\underline{v}_1) - F(\underline{v}_2) = \underline{0} \\ &\Leftrightarrow F(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{0} \\ &\Leftrightarrow \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in \ker F \\ &\Leftrightarrow \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in \{\underline{0}\} \\ &\Leftrightarrow \underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{0} \\ &\Leftrightarrow \underline{v}_1 = \underline{v}_2\end{aligned}$$

2. Dimostriamo che se F è iniettiva allora $\ker F = \{0\}$.

Ci basta dimostrare che $\underline{v} \in \ker F \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$. Infatti

$$\underline{v} \in \ker F \Leftrightarrow F(\underline{v}) = \underline{0} = F(\underline{0}) \Rightarrow F(\underline{v}) = F(\underline{0}) \Leftrightarrow \underline{v} = \underline{0}$$

dove l'ultima equivalenza è data dall'injectività di F .

□

Un morfismo F conserva le relazioni lineari tra gli elementi del dominio, e non ne aggiunge se è iniettivo.

Proposizione 19.14. [III90] *Dato $F: V \rightarrow W$ morfismo di $\mathbb{K}$ -spazi e $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p \in V$. Allora*

1. *Se $\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_p \underline{v}_p = \underline{0}_V$ allora $\alpha_1 F(\underline{v}_1) + \dots + \alpha_p F(\underline{v}_p) = \underline{0}_W$*
2. *Se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ sono linearmente dipendenti con coefficienti α lo sono anche $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_p)$ con gli stessi coefficienti. Ovvero, un morfismo conserva le relazioni lineari.*
3. *Se F è iniettiva e $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ sono linearmente indipendenti, lo sono anche $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_p)$. Ovvero, un morfismo iniettivo conserva l'indipendenza lineare.*
4. *Se $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_p)$ sono linearmente indipendenti lo sono anche $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$.*

Dimostrazione.

1. Immediata dalla linearità di F .
2. Immediata dal punto precedente.
3. Dimostriamo che $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_p)$ sono linearmente indipendenti con la definizione.

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i F(\underline{v}_i) = \underline{0}_W \Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{0}_{\mathbb{K}^p}$$

Abbiamo

$$\begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^p \alpha_i F(\underline{v}_i) = \underline{0}_W & & \\ \Downarrow & \text{linearità di } F & \\ F\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i \underline{v}_i\right) = F(\underline{0}_V) = \underline{0}_W & & \\ \Downarrow & \text{iniettività di } F & \\ \sum_{i=1}^p \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0}_V & & \\ \Downarrow & \text{lineare indipendenza dei } \underline{v}_i & \\ \underline{\alpha} = \underline{0}_{\mathbb{K}^p} & & \end{array}$$

4. Immediato dal punto 2. Ricordiamo che per due affermazioni logiche P, Q da $P \Rightarrow Q$ deduciamo non $Q \Rightarrow$ non P . Quindi se F è iniettivo da

$$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p \text{ linearmente dipendenti implica } F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_p) \text{ linearmente dipendenti}$$

abbiamo

$F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_p)$ linearmente indipendenti implica $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ linearmente indipendenti

□

In genere scriveremo $\underline{0}$ senza specificare lo spazio come ad esempio $\underline{0}_V$, $\underline{0}_W$, $\underline{0}_{\mathbb{K}^p}$...

Osservazione 19.15. [IIA90] Dato $F: V \rightarrow W$ morfismo di $\mathbb{K}$ -spazi e $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p \in V$, possiamo avere $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ linearmente indipendenti ma $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_p)$ dipendenti. Basta prendere per esempio $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ linearmente indipendenti e $V = \text{Span}(\underline{v})$

$$F \equiv \underline{0}: \begin{array}{ccc} V & \rightarrow & W \\ \underline{v}_i & \mapsto & \underline{0} \end{array}$$

Proposizione 19.16. [III92] [Proposto] Dato $F: V \rightarrow W$ morfismo di $\mathbb{K}$ -spazi e $B = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base di V . Allora

$$F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_n) \text{ generano } \text{Im } F$$

Se F è iniettiva, $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_n)$ sono base di $\text{Im } F$.

Dimostrazione. Un vettore $\underline{w} \in \text{Im } F$ è, per definizione, l'immagine di un vettore $\underline{v} \in V$. Dato che B è base, esistono $\underline{\alpha}$ tali che $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i$. Ma allora

$$\underline{w} = F(\underline{v}) = F\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F(\underline{v}_i)$$

che è la tesi.

Il secondo punto segue dal primo e dalla Proposizione 19.14 (vettori immagine di indipendenti secondo un morfismo iniettivo sono indipendenti). □

Osservazione 19.17. [III85] In generale l'immagine secondo F di una base di V non è base di $\text{Im } F$

Esempio 19.18. [III86] Sia data la funzione

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + 2y, 2x + 4y) \end{array}$$

ed abbiamo $F(\underline{e}_1) = (1, 2)$ e $F(\underline{e}_2) = (2, 4)$, ma i due vettori $(1, 2), (2, 4)$ non formano una base di $\text{Im } F = \text{Span}((1, 2))$, che ha dimensione 1, mentre ciascuno di loro è base $\text{Im } F = \text{Span}((1, 2))$.

19.3 Teorema della dimensione

Questo teorema è immediato dal teorema di Rouchè-Capelli in forma omogenea, cfr. Proposizione 17.1. Qui viene riportata una dimostrazione (in due varianti notazionali) per completezza, ma non è richiesta per l'esame.

Teorema 19.19 (Teorema della dimensione). [III55] Sia $T: V \rightarrow W$ un morfismo di $\mathbb{K}$ spazi, con $\dim V = n$. Allora

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \text{Im}(T) = \dim \ker T + rk(T)$$

Dimostrazione. Sia $\underline{u} = \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r$ una base di $\ker T$. Completiamola a base di V mediante gli $n - r$ vettori $\underline{v} = \underline{v}_{r+1}, \dots, \underline{v}_n$. Diamo un nome alle immagini dei vettori di $\underline{v}$ (i vettori di $\underline{u}$ vanno in zero)

$$\underline{w}_j = T(\underline{v}_j) \quad j: r+1 \dots n$$

Vogliamo dimostrare che $\underline{w}$ è una base di $\text{Im } T$, il che completerebbe la dimostrazione, dato che avremmo

$$n = \dim \ker T + \dim \text{Im } T$$

Sappiamo che $T(\underline{u}), T(\underline{v})$ e quindi $T(\underline{v}) = \underline{w}$ generano $\text{Im } T$ (Proposizione 19.16). Ci basta dimostrare che sono linearmente indipendenti. Usiamo la definizione: abbiamo $\underline{\alpha}$ e devo dimostrare che l'unica soluzione del sistema

$$\alpha_{r+1}\underline{w}_{r+1} + \cdots + \alpha_n \underline{w}_n = \underline{0} \text{ come dire } \underline{\alpha} \cdot \underline{w} = \underline{0}$$

è $\underline{\alpha} = \underline{0}$. Ma $\underline{w}_j = T(\underline{v}_j)$ quindi il sistema si può scrivere come

$$\begin{aligned} \alpha_{r+1}T(\underline{v}_{r+1}) + \cdots + \alpha_n T(\underline{v}_n) &= \underline{0} \\ T(\alpha_{r+1}\underline{v}_{r+1} + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n) &= \underline{0} \end{aligned}$$

ma questo implica che

$$\alpha_{r+1}\underline{v}_{r+1} + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n \in \ker T$$

e quindi esistono $\underline{\beta}$ tali che

$$\begin{aligned} \alpha_{r+1}\underline{v}_{r+1} + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n &= \beta_{r+1}\underline{u}_1 + \cdots + \beta_n \underline{u}_r \\ \alpha_{r+1}\underline{v}_{r+1} + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n - \beta_{r+1}\underline{u}_1 - \cdots - \beta_n \underline{u}_r &= \underline{0} \end{aligned}$$

ma $\underline{v}, \underline{u}$ sono base di V , quindi linearmente indipendenti, quindi $\underline{\beta} = \underline{0}$ e $\underline{\alpha} = \underline{0}$. Ma questo ci dà la lineare indipendenza di $\underline{w}$ (il sistema di cui dovevamo controllare $\underline{0}$ essere l'unica soluzione era $\underline{\alpha} \cdot \underline{w} = \underline{0}$). $\square$

Diamo una versione con notazione compatta del Teorema della dimensione: stiamo indicando i vettore dei vettori $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ come $\underline{u}$, e quando scriviamo $T(\underline{u})$ intendiamo $T(\underline{u}_1), \dots, T(\underline{u}_n)$.

Teorema 19.20 (Teorema della dimensione). [III55a] *Sia $T: V \rightarrow W$ un morfismo di $\mathbb{K}$ spazi, con V di dimensione finita. Allora*

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \text{Im}(T) = \dim \ker T + rk(T)$$

Dimostrazione. Sia $\underline{u}$ una base di $\ker T$. Completiamola a base di V mediante gli i vettori $\underline{v}$. Diamo un nome alle immagini dei vettori di $\underline{v}$ (i vettori di $\underline{u}$ vanno in zero)

$$\underline{w} = T(\underline{v})$$

Vogliamo dimostrare che $\underline{w}$ è una base di $\text{Im } T$, il che completerebbe la dimostrazione, dato che avremmo

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \text{Im } T$$

Sappiamo che $T(\underline{u}), T(\underline{v})$ e quindi $T(\underline{v}) = \underline{w}$ generano $\text{Im } T$ (ricordiamo che $T(\underline{u}) = \underline{0}$ e la Proposizione 19.16). Mi basta dimostrare che i vettori $\underline{w}$ sono linearmente indipendenti. Devo dimostrare che l'unica soluzione del sistema

$$\underline{\alpha} \cdot \underline{w} = \underline{0}$$

è $\underline{\alpha} = \underline{0}$. Ma $\underline{w} = T(\underline{v})$ quindi il sistema si può scrivere come

$$\underline{\alpha} \cdot T(\underline{v}) = \underline{0} \Leftrightarrow T(\underline{\alpha} \cdot \underline{v}) = \underline{0} \Rightarrow \underline{\alpha} \cdot \underline{v} \in \ker T$$

e quindi esistono scalari $\underline{\beta}$ tali che

$$\underline{\alpha} \cdot \underline{v} = \underline{\beta} \cdot \underline{u} \Rightarrow \underline{\alpha} \cdot \underline{v} - \underline{\beta} \cdot \underline{u} = \underline{0}$$

ma $\underline{v}, \underline{u}$ sono base di V , quindi linearmente indipendenti, quindi $(\underline{\beta}, \underline{\alpha}) = \underline{0}$. Ma questo ci dà la lineare indipendenza di $\underline{w}$ (il sistema di cui dovevamo controllare $\underline{0}$ essere l'unica soluzione era $\underline{\alpha} \cdot \underline{w} = \underline{0}$). $\square$

Il teorema della dimensione ha alcuni utili corollari:

Corollario 19.21. [III61] *Data $T: V \rightarrow W$ morfismo di $\mathbb{K}$ -spazi, con $\dim V$ finita*

1. *T è iniettiva se e solo se $\dim(V) \leq \dim(W)$ e $rk(T) = \dim V$*
2. *T è surgettiva se e solo se $\dim(W) \leq \dim(V)$ e $rk(T) = \dim W$*
3. *Nel caso particolare $T: V \rightarrow V$. T iniettiva $\Leftrightarrow T$ surgettiva*

In particolare

1. *Se $\dim(V) > \dim(W)$ non c'è spazio in W per $\dim V$ vettori linearmente indipendenti, quindi le immagini dei vettori di una base di V sono dipendenti, ed F non può essere iniettiva.*
2. *Se $\dim(W) > \dim(V)$ le immagini di una base di V non riescono a coprire tutto W*

Se lavoriamo su spazi vettoriali di dimensione finita possiamo prendere $V = \mathbb{K}^n$ e $W = \mathbb{K}^m$:

Corollario 19.22. [IIQ61] *Siano V, W $\mathbb{K}$ -spazi di dimensione rispettivamente n, m . Data $T: V \rightarrow W$ morfismo di $\mathbb{K}$ -spazi con associata matrice A*

1. *T è iniettiva se e solo se $rk(T) = \dim V$ se e solo se $m \geq n$ e $rk(A) = n$*
2. *T è surgettiva se e solo se $m \leq n$ e $rk(A) = m$*
3. *Nel caso particolare $T: V \rightarrow V$*

$$T \text{ iniettiva} \Leftrightarrow T \text{ surgettiva} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow T \text{ invertibile} \Leftrightarrow T \text{ bigettiva}$$

Dimostrazione. Tutte le affermazioni sono immediate conseguenze del Teorema della Dimensione. □

19.4 Isomorfismi

Osservazione 19.23. [JJJ00] *Dati V, W $\mathbb{K}$ -spazi, è immediato verificare che l'insieme*

$$\text{hom}(V, W) = \{T: V \rightarrow W \mid T \text{ morfismo di } \mathbb{K}\text{-spazi}\} \underset{SSP}{\subseteq} \{f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}\}$$

Proposizione 19.24. [JJJ40] *Dati $f: V \rightarrow W, g: W \rightarrow U$ morfismi di $\mathbb{K}$ -spazi, la funzione $g \circ f: V \rightarrow U$ è un morfismo di $\mathbb{K}$ -spazi.*

Dimostrazione. Abbiamo $f, g \in \text{hom}(V, V)$ e vogliamo che $f \circ g \in \text{hom}(V, V)$. Verifichiamolo con la definizione di morfismo (testiamo la chiusura sulla combinazione lineare):

$$\begin{aligned} f \circ g(\lambda \underline{v}_1 + \mu \underline{v}_2) &= f(g(\lambda \underline{v}_1 + \mu \underline{v}_2)) \\ &= f(\lambda g(\underline{v}_1) + \mu g(\underline{v}_2)) \\ &= \lambda f(g(\underline{v}_1)) + \mu f(g(\underline{v}_2)) \\ &= \lambda f \circ g(\underline{v}_1) + \mu f \circ g(\underline{v}_2) \end{aligned}$$

□

Esempio 19.25. [JJJ12] Abbiamo i due morfismi di $\mathbb{R}$ -spazio

$$\begin{array}{ccc} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto (x - y, x + y) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} g: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto (2x, 0) \end{array}$$

è facile verificare che

$$\begin{array}{ccc} f \circ g: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto f(g((x, y))) = f((2x, 0)) = (2x, 2x) \end{array}$$

è un morfismo di $\mathbb{R}$ -spazio.

Definizione 19.26. [JJJ04] Siano V, W $\mathbb{K}$ -spazi. Se esiste un morfismo bigettivo (invertibile) $T: V \rightarrow W$ diciamo che T è un isomorfismo, che V, W sono isomorfi e scriviamo $V \simeq W$.

Proposizione 19.27 (Inverso di un morfismo è morfismo). [III15] Sia $F: V \rightarrow W$ una funzione invertibile, morfismo di $\mathbb{K}$ spazi. Allora $F^{-1}: W \rightarrow V$ è un morfismo.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W \quad F^{-1}(\lambda \underline{w}_1 + \mu \underline{w}_2) = \lambda F^{-1}(\underline{w}_1) + \mu F^{-1}(\underline{w}_2)$$

Dato che F è invertibile, è surgettiva. Quindi esistono $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ tali che

$$\begin{array}{lcl} F(\underline{v}_1) = \underline{w}_1 & \Leftrightarrow & \underline{v}_1 = F^{-1}(\underline{w}_1) \\ F(\underline{v}_2) = \underline{w}_2 & \Leftrightarrow & \underline{v}_2 = F^{-1}(\underline{w}_2) \end{array}$$

$$\begin{aligned} F^{-1}(\lambda \underline{w}_1 + \mu \underline{w}_2) &= F^{-1}(\lambda F(\underline{v}_1) + \mu F(\underline{v}_2)) \\ &= F^{-1}(F(\lambda \underline{v}_1 + \mu \underline{v}_2)) \quad F \text{ lineare} \\ &= \lambda \underline{v}_1 + \mu \underline{v}_2 \quad F \text{ inversa di } F^{-1} \\ &= \lambda F^{-1}(\underline{w}_1) + \mu F^{-1}(\underline{w}_2) \end{aligned}$$

□

Definizione 19.28. [JJJ03] Un morfismo di $\mathbb{K}$ -spazi $T: V \rightarrow V$ si dice endomorfismo.

Osservazione 19.29. [JJJ25] La relazione $\simeq$ ha tutte le proprietà della relazione di uguaglianza:

1. (simmetrica): $V \simeq V$: basta prendere id_V come isomorfismo.
2. (riflessiva): $V \simeq W \Leftrightarrow W \simeq V$: Se $V \simeq W$ esiste un isomorfismo $f: V \rightarrow W$, che è invertibile con inversa lineare $f^{-1}: W \rightarrow V$. Dato che anche f^{-1} è isomorfismo, $W \simeq V$. Il viceversa si dimostra in modo analogo.
3. (transitiva): Se $V \simeq W$ e $W \simeq U$ allora $V \simeq U$. Dato che $V \simeq W$, $W \simeq U$ esistono isomorfismi $f: V \rightarrow W$, $g: W \rightarrow U$. Dato che la composizione di morfismi è morfismo e la composizione di bigettive è bigettiva, la funzione $f \circ g: V \rightarrow U$ è isomorfismo, e quindi $V \simeq U$.

Osservazione 19.30. [JJJ11] Due spazi isomorfi sono sostanzialmente lo stesso spazio, a meno dei nomi che diamo agli oggetti, dato che c'è una corrispondenza biunivoca che trasporta le operazioni sia da V a W che viceversa. Tutte le proprietà di spazio vettoriale si trasportano per isomorfismo.

19.5 Morfismi con dominio di dimensione finita

Definizione per linearità.

Definizione-Proposizione 19.31. [III17] *Siano V, W due $\mathbb{K}$ -spazi, $B = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base di V e dei vettori $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \in W$. Allora esiste un'unica applicazione lineare*

$$F: V \rightarrow W \quad \text{tale che } F(\underline{v}_i) = \underline{w}_i \quad i: 1, \dots, n$$

Questa applicazione si dice definita su B ed estesa per linearità, o semplicemente definita su B

Dimostrazione.

1. Esistenza: definiamo una funzione che soddisfa la proprietà e dimostriamo che è lineare. La funzione è

$$T: \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{w}_i$$

Ogni vettore $\underline{v} \in V$ si può rappresentare come combinazione lineare di dei vettori $\underline{v}_i$, dato che B è base di V ; la funzione quindi è ben definita. Vediamo la linearità

$$\begin{aligned} F\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \underline{v}_i\right) &= F\left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) \underline{v}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) F(\underline{v}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) \underline{w}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{w}_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \underline{w}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i F(\underline{v}_i) + \sum_{i=1}^n \beta_i F(\underline{v}_i) \\ &= F\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i\right) + F\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \underline{v}_i\right) \end{aligned}$$

2. Unicità: vogliamo dimostrare che se un'altra applicazione lineare $G: V \rightarrow W$ è tale che

$$G(\underline{v}_i) = F(\underline{v}_i) = \underline{w}_i \quad i: 1, \dots, n$$

abbiamo necessariamente $F \equiv G$. Per il principio di identità delle funzioni, questo equivale a

$$\forall \underline{v} \in V \quad F(\underline{v}) = G(\underline{v})$$

Dato che B è una base di V abbiamo che esiste $\underline{\alpha} \in \mathbb{K}^n$ tale che

$$\forall \underline{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i$$

Quindi

$$\begin{aligned} F\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i\right) &= G\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i\right) \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i F(\underline{v}_i) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i G(\underline{v}_i) \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{w}_i &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{w}_i \end{aligned}$$

ed abbiamo concluso. □

Ricordiamo che due funzioni sono uguali come funzioni se assumono lo stesso valore su ogni elemento del dominio. Per morfismi di spazi finiti possiamo dire di più:

Corollario 19.32. [III18] *Due funzioni lineari che assumono gli stessi valori su una base del dominio sono uguali come funzioni.*

Possiamo facilmente passare da una rappresentazione per formula ad una su base e viceversa.

Esempio 19.33. [III28] *Definiamo su $\mathbb{R}^3$ il morfismo*

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ \underline{e}_1 &\mapsto (1, 1, 0, 0) \\ \underline{e}_2 &\mapsto (0, 1, 0, 1) \\ \underline{e}_3 &\mapsto (1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

Vogliamo scrivere F direttamente: vediamo che per $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ abbiamo

$$\begin{aligned} F((x, y, z)) &= F(x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2 + z\underline{e}_3) = xF(\underline{e}_1) + yF(\underline{e}_2) + zF(\underline{e}_3) \\ &= x(1, 1, 0, 0) + y(0, 1, 0, 1) + z(1, 1, 1, 1) \\ &= (x, x, 0, 0) + (0, y, 0, y) + (z, z, z, z) \\ &= (x + z, x + y + z, z, y + z) \end{aligned}$$

19.5.1 Morfismi e matrici

È immediata conseguenza della Definizione-Proposizione 19.31 che un morfismo tra spazi finiti, una volta che abbiamo identificato una base del dominio, può essere definito da una matrice.

Proposizione 19.34. [IIX23] *La funzione*

$$\begin{aligned} T: \quad \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) &\rightarrow \{F: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m \mid F \text{ morfismo}\} \\ M &\mapsto T(M) = L_M: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \rightarrow & \mathbb{K}^m \\ \underline{v} & \mapsto & M \cdot \underline{v} \end{array} \end{aligned}$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione.

1. Buona definizione. La funzione $T(M) = L_M$ è lineare dato che

$$L_M(\alpha \underline{v} + \beta \underline{w}) = M \cdot (\alpha \underline{v} + \beta \underline{w}) = M \cdot (\alpha \underline{v}) + M \cdot (\beta \underline{w}) = \alpha M \cdot (\underline{v}) + \beta M \cdot (\underline{w}) = \alpha L_M(\underline{v}) + \beta L_M(\underline{w})$$

2. Linearità.

$$\begin{aligned} T(\lambda A + \mu B) &= \lambda A + \mu B: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \rightarrow & \mathbb{K}^m \\ \underline{v} & \mapsto & (\lambda A + \mu B) \cdot \underline{v} \end{array} \\ &= \lambda \left(A: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \rightarrow & \mathbb{K}^m \\ \underline{v} & \mapsto & A \cdot \underline{v} \end{array} \right) + \mu \left(B: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \rightarrow & \mathbb{K}^m \\ \underline{v} & \mapsto & B \cdot \underline{v} \end{array} \right) \end{aligned}$$

3. Iniettività. Basta dimostrare che $\ker T = \{0_{m \times n}\}$. Sia

$$T(M) = L_M \equiv 0 \Leftrightarrow \forall i: 1, \dots, n \quad M \underline{e}_i = \underline{0}_m \Leftrightarrow M = 0_{m \times n}$$

4. Surgettività. dato un morfismo $F: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ e matrice

$$M_F = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ F(\underline{e}_1) & \cdots & F(\underline{e}_n) & & & \\ & & & & & \end{array} \right)$$

abbiamo che $T(M_F) = L_{M_F} \equiv F$ per la Proposizione-Definizione 19.31, dato che hanno stessa immagine su una base.

□

Definizione 19.35. [IIY23] Con le notazioni della proposizione precedente, indichiamo L_M come il morfismo associato alla matrice M e M_F come la matrice associata a F . Se vogliamo specificare che i le coordinate dei vettori che stiamo considerando sono rispetto alle basi canoniche, scriveremo $(M_E)_E^E$.

Corollario 19.36. [IIZ23] Con le notazioni della proposizione precedente, l'applicazione

$$\begin{aligned} H: \{F: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m \mid F \text{ morfismo}\} &\rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) \\ F &\mapsto H(F) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ F(\underline{e}_1) & \cdots & F(\underline{e}_n) & & & \\ & & & & & \end{array} \right) \end{aligned}$$

è morfismo e l'inversa di T .

Dimostrazione. Lasciata per esercizio.

□

Corollario 19.37. [JJJ09] Sia T l'isomorfismo introdotto nella proposizione precedente 20.3. Allora per le proprietà dei morfismi di $\mathbb{K}$ -spazi è immediato che $T(0) = 0$ e se $m = n$ e quindi esistono $\text{id}_{\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n}$ e $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ invertibili, abbiamo che

$$T(\text{id}_{\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n}) = I_n \quad e \quad T(f^{-1}) = T(f)^{-1}$$

in la notazione $L_{(\cdot)}$ scriviamo

$$M_{\text{id}_{\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n}} = I_n \quad e \quad (L_M)^{-1} = L_{M^{-1}}$$

19.6 Esercizi svolti

Esempio 19.38. [IIQ28] Definiamo su $\mathbb{R}^3$ il morfismo

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x - 2y + 3z, 4x + 5z) \end{aligned}$$

Vogliamo scrivere la matrice associata ad F dalla base E_3 : vediamo che

$$\begin{aligned} F(\underline{e}_1) &= F((1, 0, 0)) = (1, 4) \\ F(\underline{e}_2) &= F((0, 1, 0)) = (-2, 0) \\ F(\underline{e}_3) &= F((0, 0, 1)) = (3, 5) \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata a F dalla base E_3 è $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Possiamo scrivere F come

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \underline{e}_1 &\mapsto (1, 4) \\ \underline{e}_2 &\mapsto (-2, 0) \\ \underline{e}_3 &\mapsto (3, 5) \end{aligned}$$

o come

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \underline{v} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \underline{v} \end{aligned}$$

Esempio 19.39. [III27] Dato il morfismo

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y, y + z) \end{aligned}$$

notiamo che

$$F(\underline{e}_1) = F((1, 0, 0)) = (1, 0), \quad F(\underline{e}_2) = F((0, 1, 0)) = (1, 1), \quad F(\underline{e}_3) = F((0, 0, 1)) = (0, 1)$$

e quindi F è uguale al morfismo definito per linearità

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \underline{e}_1 &\mapsto (1, 0) \\ \underline{e}_2 &\mapsto (1, 1) \\ \underline{e}_3 &\mapsto (0, 1) \end{aligned}$$

dato che assumono gli stessi valori su una base.

Esempio 19.40. [III58] Data la funzione

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (1, 2, 1) &\mapsto (1, 0, 0, 0) \\ (1, 1, 1) &\mapsto (1, 0, 1, 0) \\ (0, 3, 2) &\mapsto (2, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

determinare se possibile una base di $\ker F$ e $\operatorname{Im} F$.

Soluzione: Verifichiamo che F sia definita su una base di $\mathbb{R}^3$, controllando che i vettori

$$(1, 2, 1), \quad (1, 1, 1), \quad (0, 3, 2)$$

formino una base di $\mathbb{R}^3$. Calcoliamo il determinante della matrice (sviluppiamo per la terza riga)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

che ha quindi rango 3. $B = (1, 2, 1), (1, 1, 1), (0, 3, 2)$ è base di $\mathbb{R}^3$ e T è ben definita.

Vediamo se F è iniettiva - basta vedere se $\ker F = \{\underline{0}\}$, ovvero se l'unica soluzione del sistema omogeneo

$$F((x, y, z)) = \underline{0} \Leftrightarrow x(1, 0, 0, 0) + y(1, 0, 1, 0) + z(2, 0, 1, 0) = \underline{0}$$

è quella nulla. La matrice associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Si vede immediatamente che il rango della completa (e dell'incompleta, è un sistema omogeneo) è 2, quindi non esiste soluzione unica, la funzione non è iniettiva e $\dim \ker F \geq 1$. Se vogliamo trovare una base di $\ker F = \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ dobbiamo risolvere esplicitamente il sistema, ovvero trovare un vettore generico delle soluzioni e da questo una base.

$$F((x, y, z)) = \underline{0} \Leftrightarrow x(1, 0, 0, 0) + y(1, 0, 1, 0) + z(2, 0, 1, 0) = \underline{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

Imponendo queste condizioni al vettore generico (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ troviamo il vettore generico di $\ker F$, $(-z, -z, z) = z(-1, -1, 1)$. Quindi $\ker F = \text{Span}((-1, -1, 1)) = \text{Span}((1, 1, -1))$ e $\dim \ker F = 1$. Dato che

$$\text{Im } F = \text{Span}((1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (2, 0, 1, 0))$$

guardiamo la matrice sopra e vediamo che per esempio la prima e seconda colonna sono linearmente indipendenti (hanno i pivot). Quindi l'immagine ha base, per esempio,

$$B' = (1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0)$$

□

Esempio 19.41. [III26] Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, scrivere l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mediante le basi E_1, E_2 e darne la formula esplicita.

Soluzione. Il morfismo T si può scrivere come

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \underline{e}_1 &\mapsto (1, 5) \\ \underline{e}_2 &\mapsto (2, 4) \end{aligned}$$

Quindi

$$F((x, y)) = F(x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2) = xF(\underline{e}_1) + yF(\underline{e}_2) = x(1, 5) + y(2, 4) = (x + 2y, 5x + 4y)$$

□

Esempio 19.42. [IIQ04] La funzione

$$\begin{aligned} G: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x + y, x - y) \end{aligned}$$

è lineare, per costruzione.