

Capitolo 17

Lezione Diciassettesima

Teorema 17.1 (Rouché-Capelli per sistemi omogenei). [FFT39] Dato il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$, con $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$, abbiamo che $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0}) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^n$ ha dimensione $n - rk(A)$.

Dimostrazione. Dimostriamolo trovando una base di $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ con $n - rk(A)$ elementi

Sia $G \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ una matrice tale che $A \xrightarrow{\text{Gauss}} G$. Dato che siamo interessati solo al numero di soluzioni ma non al loro valore specifico, possiamo mettere G in forma normale con qualche operazione di Gauss e scambiando qualche colonna. Stiamo, se necessario, cambiando nome alle variabili, ma lo spazio vettoriale rimane inalterato. Otteniamo, rimarcando per ogni colonna la variabile x_i associata,

$$G = \left(\begin{array}{c|c} x_1, \dots, x_r & x_{r+1}, \dots, x_n \\ \hline I_r & A \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

Dalla struttura della matrice, è evidente che possiamo esprimere le variabili legate ai pivot $x_1, \dots, x_r$ mediante una combinazione lineare delle variabili $\underline{x} = x_{r+1}, \dots, x_n$ non legate ai pivot.

Per esempio, interpretiamo la prima riga della matrice come equazione

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1,n}x_n = 0$$

da cui abbiamo l'espressione della variabile x_1 come combinazione lineare delle variabili $x_{r+1}, \dots, x_n$.

$$x_1 = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1,n}x_n$$

Sia $x_j = P_j(\underline{x}) \in \mathbb{K}[\underline{x}]$, lineare ed omogeneo, con $j : 1, \dots, r$. Un vettore generico di $\mathbb{K}^n$ è

$$(x_1, \dots, x_n)$$

se sostituisco a ciascuna variabile legata ad un pivot x_j la sua espressione $x_j = P_j(\underline{x})$ ottengo un vettore generico delle soluzioni

$$\underline{v} = (P_1(\underline{x}), \dots, P_r(\underline{x}), x_{r+1}, \dots, x_n)$$

se raccogliamo le variabili $x_{r+1}, \dots, x_n$ otteniamo

$$\underline{v} = x_{r+1}(b_{r+1,1}, \dots, b_{r+1,r}, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(b_{n,1}, \dots, b_{n,r}, 0, \dots, 0, 1)$$

per opportuni $b_{ij} \in \mathbb{K}$. Questi vettori

$$\begin{pmatrix} b_{r+1,1}, & \dots, b_{r+1,r}, & 1, 0, \dots, 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1}, & \dots, b_{nr}, & 0, \dots, 0, 1 \end{pmatrix}$$

generano $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ per costruzione e sono linearmente indipendenti dato che se li mettiamo per riga in una matrice, questa contiene una sottomatrice $r \times r$ non singolare.

Per ogni colonna che non contiene pivot abbiamo un parametro, quindi possiamo descrivere $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ con $n - rk(A)$ parametri. Costruiamo una base di $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ raccogliendo i parametri. I vettori che otteniamo sono linearmente indipendenti dato che la sottomatrice quadrata data da tutte le $n - rk(A)$ righe e dalle ultime $n - rk(A)$ colonne è non singolare.

Avremmo potuto lasciare la matrice G in forma standard ed evitare gli scambi di colonne, ma la notazione esarebbe stata più complessa. $\square$

Vediamo un esempio di applicazione della forma omogenea del teorema di Rouché-Capelli.

Esempio 17.2. [FFX39] *Troviamo una base delle soluzioni del sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ dove*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Riduciamo A a forma normale con Gauss

```
A:=Mat([1,2,3,4,5],
        [1,1,1,3,2],
        [1,0,0,3,3]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);
Scala2DiagonaleVerbose(L);
-----
L:=RiduciScalaVerbose(A);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 4, 5]
      2^a-1*1^a [0, -1, -2, -1, -3]
      3^a-1*1^a [0, -2, -3, -1, -2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 4, 5]
----- [0, -1, -2, -1, -3]
      3^a-2*2^a [0, 0, 1, 1, 4]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=1
Risultato Matrix:Pivots:Row swaps,Splits
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 2, 3, 4, 5]
      2^a*-1 [0, 1, 2, 1, 3]
----- [0, 0, 1, 1, 4]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
      1^a-3*3^a [1, 2, 0, 1, -7]
      2^a-2*3^a [0, 1, 0, -1, -5]
```

```

----- [0, 0, 1, 1, 4]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
      1^a-2*2^a [1, 0, 0, 3, 3]
----- [0, 1, 0, -1, -5]
----- [0, 0, 1, 1, 4]

```

Notiamo che in questo caso non è stato necessario ricorrere a scambi di colonne per ottenere la forma normale. Il rango di A è 3 ed il sistema associato alla matrice in forma normale è

$$\begin{cases} x_1 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_3 = x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_4 - 3x_5 \\ x_2 = x_4 + 5x_5 \\ x_3 = -x_4 - 4x_5 \end{cases}$$

N.B. Pensando alla dimostrazione del teorema di Rouché-Capelli in forma omogenea, otteniamo

$$\begin{aligned} P_1(x_4, x_5) &= -3x_4 - 3x_5 \\ P_2(x_4, x_5) &= x_4 + 5x_5 \\ P_3(x_4, x_5) &= -x_4 - 4x_5 \end{aligned}$$

Operando le sostituzioni nel vettore generico $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ di $\mathbb{R}^5$ otteniamo il vettore generico di $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$

$$(-3x_4 - 3x_5, x_4 + 5x_5, -x_4 - 4x_5, x_4, x_5) = x_4(-3, 1, -1, 1, 0) + x_5(-3, 5, -4, 0, 1)$$

Questi due vettori generano $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ e sono linearmente indipendenti, e quindi base di $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ dato che se li mettiamo per riga in una matrice otteniamo

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

le cui ultime $2 = 5 - 3 = n - \text{rk}(A)$ colonne danno la sottomatrice I_2 , non singolare. □

Teorema 17.3 (Rouché-Capelli). [FFF39a] Dato il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, con $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$, abbiamo che

1. Se $\text{rk}([A|\underline{b}]) \neq \text{rk}(A)$ il sistema non ha soluzioni.
2. Se $\text{rk}([A|\underline{b}]) = \text{rk}(A)$ il sistema ha $\infty^{n-\text{rk}(A)}$ soluzioni.

Dimostrazione.

1. Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ammette soluzioni se e solo se $\underline{b}$ è combinazione lineare delle colonne di A , ovvero se e solo se $\underline{b} \in \text{Span}(A^1, \dots, A^n)$ e questo avviene se e solo se $\text{Span}(A^1, \dots, A^n) = \text{Span}(A^1, \dots, A^n, \underline{b})$ e questo avviene se e solo se $\text{rk}(A) = \text{rk}([A|\underline{b}])$. Dimostriamo quest'ultima equivalenza, che non è banale come le altre

- Chiaramente se $\text{Span}(A^1, \dots, A^n) = \text{Span}(A^1, \dots, A^n, \underline{b})$ abbiamo che i due ranghi sono uguali.
- Se il rango di A è r , prendiamo le r colonne indipendenti di A , $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$. Se aggiungo a queste $\underline{b}$, i vettori $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}, \underline{b}$ sono linearmente dipendenti, dato che $\text{rk}([A|\underline{b}]) = \text{rk}(A) = r$. Quindi $\underline{b}$ è combinazione lineare di $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$ e quindi $\text{Span}(A^1, \dots, A^n) = \text{Span}(A^1, \dots, A^n, \underline{b})$.

2. Claim: sia $\underline{a} \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$. Allora per ogni soluzione $\underline{d}$ del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ esiste unico $\underline{c} \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ tale che $\underline{d} = \underline{a} + \underline{c}$. (Claim vuol dire: supponiamo che sia vero che... ed andiamo avanti)

Supponendo vero il claim, dimostriamo il secondo punto del teorema. Dato che $\dim \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0}) = n - rk(A)$ per la forma omogenea del teorema, abbiamo che $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ ha base $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-rk(A)}$ ed ogni suo elemento $\underline{c}$ si può scrivere come $\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_{n-rk(A)} \underline{v}_{n-rk(A)}$. Quindi ogni soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$ si può scrivere come

$$\underline{a} + \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_{n-rk(A)} \underline{v}_{n-rk(A)}$$

e dipende quindi dagli $n - rk(A)$ parametri $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-rk(A)}$. Non può dipendere da un numero minore di parametri perchè $n - rk(A)$ è la dimensione dello spazio vettoriale $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$. Ho quindi $\infty^{n-rk(A)}$ soluzioni.

Dimostrazione del claim.

$$\begin{cases} \underline{d} \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) & \Leftrightarrow A\underline{d} = \underline{b} \\ \underline{a} \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) & \Leftrightarrow A\underline{a} = \underline{b} \end{cases} \Leftrightarrow A(\underline{d} - \underline{a}) = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{d} - \underline{a} \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$$

Quindi dati $\underline{a}, \underline{c}$ esiste unico $\underline{c} = \underline{d} - \underline{a} \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ tale che $\underline{c} = \underline{d} - \underline{a} \Leftrightarrow \underline{d} = \underline{a} + \underline{c}$.

□

Vediamo un esempio di applicazione del teorema di Rouché-Capelli.

Esempio 17.4. [FFP39] Determiniamo le soluzioni del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Riduciamo la matrice A in forma normale con Gauss

```
A:=Mat([[1,2,3,4,1,1],
        [1,1,1,3,2,2],
        [0,4,2,1,2,3]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 4, 1, 1]
        2^a-1*1^a [0, -1, -2, -1, 1, 1]
    0 sotto pivot[0, 4, 2, 1, 2, 3]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 4, 1, 1]
----- [0, -1, -2, -1, 1, 1]
        3^a+4*2^a [0, 0, -6, -3, 6, 7]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-6
Risultato Matrix:Pivots:Row swaps,Splits
-----
Metto tutti i pivots a 1
```

```

----- [1, 2, 3, 4, 1, 1]
      2^a*-1 [0, 1, 2, 1, -1, -1]
      3^a*-1/6 [0, 0, 1, 1/2, -1, -7/6]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
      1^a-3*3^a [1, 2, 0, 5/2, 4, 9/2]
      2^a-2*3^a [0, 1, 0, 0, 1, 4/3]
----- [0, 0, 1, 1/2, -1, -7/6]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
      1^a-2*2^a [1, 0, 0, 5/2, 2, 11/6]
----- [0, 1, 0, 0, 1, 4/3]
----- [0, 0, 1, 1/2, -1, -7/6]

```

Anche in questo caso notiamo che non è stano necessario effettuare scambi di colonne. Operando come al solito le sostituzioni nel vettore generico $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ di $\mathbb{R}^5$ otteniamo il vettore generico delle soluzioni $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$

$$\left(-\frac{5}{2}x_4 - 2x_5 - \frac{11}{6}, -x_5 - \frac{4}{3}, -\frac{1}{2}x_4 + x_5 + \frac{7}{6}, x_4, x_5\right) = x_4 \left(-\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) + x_5 (2, -1, 1, 0, 1) + \left(-\frac{11}{6}, -\frac{4}{3}, \frac{7}{6}, 0, 0\right)$$

dove $(-\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1, 0), (2, -1, 1, 0, 1)$ formano una base di $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ e

$$\left(-\frac{11}{6}, -\frac{4}{3}, \frac{7}{6}, 0, 0\right) \text{ ovvero } \begin{cases} x_1 = -\frac{11}{6} \\ x_2 = -\frac{4}{3} \\ x_3 = \frac{7}{6} \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

è una soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$. Vediamo quindi che ogni soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$ si può esprimere come una soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$ più una soluzione generica di $A\underline{x} = \underline{0}$. $\square$

Corollario 17.5. [GGQ66] *Siano dati $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ $\mathbb{K}$ -spazio, linearmente indipendenti, $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$*

$$W = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = \{a_1\underline{v}_1 + \dots + a_n\underline{v}_n \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}\}$$

e

$$W_1 = \{x_1\underline{v}_1 + \dots + x_n\underline{v}_n \mid A \cdot \underline{x} = \underline{0}\}$$

allora

1. $W_1 \underset{SSP}{\subseteq} W$.
2. $\dim W_1 = \dim W - rk(A) = n - rk(A)$.
3. Un vettore generico di W_1 si ottiene dal vettore generico di W $a_1\underline{v}_1 + \dots + a_n\underline{v}_n$ aggiungendo le condizioni $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$.
4. Una base di W_1 si ottiene come al solito dal suo vettore generico raccogliendo le x .

Dimostrazione.

1. Dato che i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti, e generano W per costruzione, sono base $B = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ di W . Se scriviamo W_1 usando le coordinate dei vettori in base B abbiamo che e

$$W_1 = \{(a_1, \dots, a_n)_B \mid A \cdot \underline{a} = \underline{0}\} = \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$$

che sappiamo già essere un sottospazio di W .

2. Per il teorema di Rouché-Capelli, $\dim W_1 = \dim W - rk(A)$.
3. Ovvio considerando la dimostrazione del teorema di Rouché-Capelli omogeneo.
4. Ovvio.

□

Esempio 17.6. [HHE12] *Troviamo una base dello spazio*

$$W_1 = \left\{ x(1, 2, 3, 0, 0) + y(1, 3, 2, 2, 2) + z(1, 1, 1, 1, 1) + t(1, 0, 1, 0, 1) \mid S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \underline{0} \right\}$$

Svolgimento. La verifica che i quattro vettori sono linearmente indipendenti è lasciata al lettore. Innanzitutto vediamo facilmente che $\dim W_1 = 4 - rk(S) = 2$. La base che cerchiamo avrà quindi due vettori. Se x, y, z, t possono variare in tutto $\mathbb{K}$ otteniamo $W = \text{Span}((1, 2, 3, 0, 0), (1, 3, 2, 2, 2), (1, 1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0, 0))$. Se aggiungiamo le condizioni

$$S \cdot \underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \underline{0}$$

otteniamo W_1 . Risolvendo il sistema $S \cdot \underline{x} = \underline{0}$ abbiamo immediatamente $x = z - t$, $y = -3z + 2t$. Sostituiamo queste condizioni nel vettore generico di W

$$x(1, 2, 3, 0, 0) + y(1, 3, 2, 2, 2) + z(1, 1, 1, 1, 1) + t(1, 0, 1, 0, 1)$$

ed otteniamo

$$\begin{aligned} & (z - t)(1, 2, 3, 0, 0) + (-3z + 2t)(1, 3, 2, 2, 2) + z(1, 1, 1, 1, 1) + t(1, 0, 1, 0, 1) = \\ & = (-z + 2t, -6z + 4t, -2z + 2t, -5z + 4t, -5z + 5t) \\ & = z(-1, -6, -2, -5, -5) + t(2, 4, 2, 4, 5) \end{aligned}$$

Una base di W_1 è

$$B_1 = (-1, -6, -2, -5, -5), (2, 4, 2, 4, 5)$$

o se preferiamo evitare i negativi

$$B_2 = (1, 6, 2, 5, 5), (2, 4, 2, 4, 5)$$

Se avessimo scritto i vettori nelle coordinate della base

$$B = (1, 2, 3, 0, 0), (1, 3, 2, 2, 2), (1, 1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0, 1)$$

avremmo sostituito le condizioni $x = z - t$, $y = -3z + 2t$ nel vettore generico di W

$$(x, y, z, t)_B$$

ottenendo

$$(z - t, -3z + 2t, z, t)_B = z(1, -3, 1, 0)_B + t(-1, 2, 0, 1)_B$$

Una base di W_1 scritta in coordinate B è quindi

$$B_1 = (1, -3, 1, 0)_B, (-1, 2, 0, 1)_B$$

□

Teorema 17.7 (Formula di Grassman). [HHH12] Sia U un $\mathbb{K}$ -spazio di dimensione finita n e $V, W \subseteq U$.

Allora

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim V \cap W$$

Dimostrazione. Dato che U dimensione finita, V e W hanno dimensione finita e quindi base. Prendiamo $B_v = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ base di V e $B_w = \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_q$ base di W . Ogni vettore di V si può scrivere come $\sum_{i=1}^p a_i \underline{v}_i$ ed ogni vettore di W si può scrivere come $\sum_{j=1}^q b_j \underline{w}_j$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} V \cap W &= \left\{ \underline{u} \in U \mid \exists \underline{a} \in \mathbb{K}^p, \underline{b} \in \mathbb{K}^q \text{ t.c. } \underline{u} = \sum_{i=1}^p a_i \underline{v}_i = \sum_{j=1}^q b_j \underline{w}_j \right\} \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^q b_j \underline{w}_j \mid \exists \underline{a} \in \mathbb{K}^p, \underline{b} \in \mathbb{K}^q \text{ t.c. } \sum_{i=1}^p a_i \underline{v}_i - \sum_{j=1}^q b_j \underline{w}_j = \underline{0} \right\} \end{aligned}$$

Esaminiamo ora il sistema

$$\sum_{i=1}^p a_i \underline{v}_i - \sum_{j=1}^q b_j \underline{w}_j = \underline{0}$$

La matrice associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mid & & \mid & \mid & & \mid \\ \underline{v}_1 & \cdots & \underline{v}_p & -\underline{w}_1 & \cdots & -\underline{w}_q \\ \mid & & \mid & \mid & & \mid \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Riduciamo la matrice con Gauss. Dato che le prime p colonne sono linearmente indipendenti (formano una base di V) possiamo mettere la matrice in forma standard ed otteniamo

$$G = \left(\begin{array}{c|c} I_p & A \\ \hline 0 & S \end{array} \right)$$

Innanzitutto notiamo che dato che le colonne della matrice formano un sistema di generatori di $V + W$ e che il numero di colonne linearmente indipendenti è $p + k$, dove k è il rango di S o il suo numero di pivot, abbiamo $\dim V + W = p + k$. Vogliamo dimostrare che se $\underline{\beta}$ è soluzione di $S\underline{\beta} = \underline{0}$, esiste una soluzione di

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & A \\ \hline 0 & S \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Infatti

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & A \\ \hline 0 & S \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p \underline{a} + A \underline{b} \\ S \underline{b} \end{pmatrix} = \underline{0}$$

e quindi se $\underline{\beta}$ è soluzione di $S\underline{\beta} = \underline{0}$, ovvero se $S\underline{\beta} = \underline{0}$, abbiamo il sistema $\begin{pmatrix} I_p \underline{a} + A \underline{\beta} \\ \underline{0} \end{pmatrix} = \underline{0}$ con $A \underline{\beta}$ vettore di costanti, e questo sistema ha necessariamente soluzione dato è omogeneo che la matrice incompleta ha rango massimo p . Possiamo quindi concludere che il sistema ha soluzione se e solo se $S\underline{\beta} = \underline{0}$, e quindi

$$V \cap W = \left\{ -\sum_{j=1}^q b_j \underline{w}_j \mid S \underline{b} = \underline{0} \right\} = \left\{ \sum_{j=1}^q b_j \underline{w}_j \mid S \underline{b} = \underline{0} \right\}$$

Possiamo ora applicare il Teorema di Rouchè-Capelli, o se preferite il suo Corollario 17.5. Ricordando che $rk(S) = k$ abbiamo che

- $\dim V \cap W = q - k$. Quindi $\dim V + W = p + k = p + q - (q - k) = \dim V + \dim W - \dim V \cap W$.
- Una base di $V \cap W$ si ottiene imponendo al vettore $\sum_{j=1}^q b_j \underline{w}_j$ le condizioni $S\underline{b} = \underline{0}$ e raccogliendo le $\underline{b}$.

Notiamo che:

- abbiamo messo la matrice in forma normale solo per semplificare la notazione. La forma a scala sarebbe bastata ma avremmo avuto un tripudio di indici, avendo dovuto considerare come variabili associate ai pivot non necessariamente $x_1, \dots, x_r$ ma r variabili qualunque tra le $\underline{x}$.
- Leggendo la dimostrazione, è evidente che è possibile prendere in esame il sistema

$$\sum_{i=1}^p a_i \underline{v}_i + \sum_{j=1}^q b_j \underline{w}_j = \underline{0} \text{ al posto del sistema } \sum_{i=1}^p a_i \underline{v}_i - \sum_{j=1}^q b_j \underline{w}_j = \underline{0}$$

□

Vediamo un esempio completo di calcolo della base dell'intersezione

Esempio 17.8. [MK09] *Dati i due sottospazi*

$$M = \text{Span}((1, 2, 1, 1, 5), (0, 0, 0, 2, 1), (2, 1, 2, 4, 11))$$

$$N = \text{Span}((2, 4, 1, 2, 3), (2, 4, 2, 0, 9), (2, 4, -1, 6, -9))$$

di $\mathbb{R}^5$, determinare le dimensioni e delle basi per $M, N, M + N, M \cap N$.

Soluzione. Determiniamo una base di N riducendo la matrice che ha come righe i generatori di N .

```

N:=Mat([[2,4,1,2,3],
        [2, 4, 2, 0, 9],
        [2, 4, -1, 6, -9]]);
L:=RiduciScalaVerbose(N);L;// Ritorna la matrice e le colonne dei pivot
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 4, 1, 2, 3]
      2^a-1*1^a [0, 0, 1, -2, 6]
      3^a-1*1^a [0, 0, -2, 4, -12]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 3]=1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 4, 1, 2, 3]
----- [0, 0, 1, -2, 6]
      3^a+2*2^a [0, 0, 0, 0, 0]

```

Ho ridotto la matrice a scala, ho trovato due pivot, quindi $\dim(N) = 2$. Dato che non ci sono stati scambi di righe e che le prime due non si sono annullate, ho trovato due basi di N , $B_1 = (2, 4, 1, 2, 3), (0, 0, 1, -2, 6)$ le righe della ridotta, o $B_2 = (2, 4, 1, 2, 3), (2, 4, 2, 0, 9)$ le righe della matrice di partenza. Uso come base di N la prima per comodità

Dobbiamo trovare una base di $M \cap N$. Procediamo col *metodo dell'uguaglianza generica* (o dei vettori generici)

Consideriamo due della basi che abbiamo determinato precedentemente per M, N , scelte per la loro semplicità:

$$C = (1, 2, 1, 1, 5), (0, -3, 0, 2, 1), (0, 0, 0, 2, 1) \text{ base di } M$$

e

$$B_1 = (2, 4, 1, 2, 3), (0, 0, 1, -2, 6) \text{ base di } N$$

Dei vettori generici di M ed N sono, rispettivamente

$$a(1, 2, 1, 1, 5) + b(0, -3, 0, 2, 1) + c(0, 0, 0, 2, 1)$$

e

$$x(2, 4, 1, 2, 3) + y(0, 0, 1, -2, 6)$$

Sia $\underline{v}$ un vettore generico di $M \cap N$. Questo deve potersi scrivere sia nella prima che nella seconda forma, quindi devono esistere $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$ tali che

$$\underline{v} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

possiamo cambiare il segno delle variabili x, y dato che stiamo lavorando in uno spazio vettoriale. Otterremo le soluzioni per $-x, -y$, che ci vanno comunque bene, dato che gli elementi della base possono essere moltiplicati per -1 e la base rimane una base.

Questo è un sistema di cinque equazioni nelle cinque incognite a, b, c, x, y , omogeneo, con matrice incompleta come sotto (la prima colonna è relativa alla variabile a , la seconda a b etc. etc.). Riduciamolo con Gauss (NON scambiamo le colonne).

```
MN:=Mat[[1, 0, 0, 2, 0],
         [2, -3, 0, 4, 0],
         [1, 0, 0, 1, 1],
         [1, 2, 2, 2, -2],
         [5, 1, 1, 3, 6]];
L:=RiduciScalaVerbose(MN);L;// Ritorna la matrice e le colonne dei pivot
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 0, 0, 2, 0]
      2^a-2*1^a [0, -3, 0, 0, 0]
      3^a-1*1^a [0, 0, 0, -1, 1]
      4^a-1*1^a [0, 2, 2, 0, -2]
      5^a-5*1^a [0, 1, 1, -7, 6]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
```

Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
 ----- [1, 0, 0, 2, 0]
 ----- [0, -3, 0, 0, 0]
 0 sotto pivot [0, 0, 0, -1, 1]
 $4^a + 2/3 * 2^a$ [0, 0, 2, 0, -2]
 $5^a + 1/3 * 2^a$ [0, 0, 1, -7, 6]
 Scambio la 3^a e la 4^a riga
 Adesso la matrice e'
 Mat([[1, 0, 0, 2, 0],
 [0, -3, 0, 0, 0],
 [0, 0, 2, 0, -2],
 [0, 0, 0, -1, 1],
 [0, 0, 1, -7, 6]])
 Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=2
 Cannello la 3^a colonna, sotto il pivot
 ----- [1, 0, 0, 2, 0]
 ----- [0, -3, 0, 0, 0]
 ----- [0, 0, 2, 0, -2]
 0 sotto pivot [0, 0, 0, -1, 1]
 $5^a - 1/2 * 3^a$ [0, 0, 0, -7, 7]
 Ho trovato il pivot in posizione A[4, 4]=-1
 Cannello la 4^a colonna, sotto il pivot
 ----- [1, 0, 0, 2, 0]
 ----- [0, -3, 0, 0, 0]
 ----- [0, 0, 2, 0, -2]
 ----- [0, 0, 0, -1, 1]
 $5^a - 7 * 4^a$ [0, 0, 0, 0, 0]

Vediamo che ci sono tre pivot nelle prime tre colonne, quelle di M , e quindi $\dim M = 3$ e i generatori di M ne sono base. Ci sono in totale quattro pivot, quindi $\dim M + N = 4$. Il sistema associato a questa matrice è

$$\begin{cases} a + 2x = 0 \\ -3b = 0 \\ 2c - 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2x = 0 \\ -3b = 0 \\ 2c - 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

la sola equazione che coinvolge solo le variabili x, y è $-x + y = 0$. Se questa condizione è soddisfatta, allora so che esistono $a, b, c \in \mathbb{K}$ ($a = -2x$, $b = 0$, $c = y$) tali che

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e questo implica che il vettore generico di N appartiene anche a M e quindi a $M \cap N$.

Se applico la condizione $x = y$ al vettore generico di N

$$x(2, 4, 1, 2, 3) + y(0, 0, 1, -2, 6)$$

ottenengo

$$(2x, 4x, 2x, 0, 9x) = x(2, 4, 2, 0, 9)$$

che è un vettore generico di $M \cap N$. Il vettore $(2, 4, 2, 0, 9)$ è quindi un generatore di $M \cap N$ dato che ogni vettore di $M \cap N$ è suo multiplo. Quindi $(2, 4, 2, 0, 9)$ è base di $M \cap N$ e $\dim M \cap N = 1$. $\square$

17.1 Somma diretta di sottospazi

Osservazione 17.9. [HHH61] *Notiamo che il determinante della matrice*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

che è 4, è uguale al prodotto

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 = 4$$

Proposizione 17.10. [HHH71] *Data la matrice quadrata*

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

con matrici A, B, C di dimensioni opportune abbiamo che

$$\det M = \det A \cdot \det C$$

Dimostrazione. Lasciata come esercizio. Hint: operare una riduzione di Gauss $\square$

Problema 17.11. *Possiamo usare gli spazi $W_1, \dots, W_n \subseteq_{SSP} V$ come "base" di V ? In un certo senso, possiamo parlare di basi "a blocchi"?*

Scegliamo di preservare l'unicità.

Esempio 17.12. [HHH81] *Abbiamo*

$$U = \text{Span}((1, 3, 1, 2), (0, 1, 0, 1)), \quad W = \text{Span}((0, 0, 3, 2), (0, 0, 1, 2))$$

Vediamo che il vettore $(1, 3, 4, 4)$ si può scrivere come somma di vettori di U, W

$$(1, 3, 4, 4) = (1, 3, 1, 2) + (0, 0, 3, 2)$$

in modo unico, perchè il sistema di equazioni

$$\alpha(1, 3, 1, 2) + \beta(0, 1, 0, 1) + \gamma(0, 0, 3, 2) + \delta(0, 0, 1, 2) = (1, 3, 4, 4)$$

ha un'unica soluzione, dato che la matrice incompleta del sistema associato (vettori per colonne)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

non singolare, ha rango massimo, e quindi la soluzione esiste unica.

Questo significa che ogni vettore di $\mathbb{R}^4$ si può scrivere in modo unico come somma di un vettore di U ed uno di W .

Esempio 17.13. [HHH82] *Abbiamo*

$$U = \text{Span}((1, 3, 1, 2), (0, 1, 0, 1)), \quad W = \text{Span}((1, 0, 3, 2), (2, 4, 4, 5), (0, 0, 0, 1))$$

Vediamo che il vettore $(1, 3, 4, 4)$ non si può scrivere come somma di vettori di U, W in modo unico, perchè il sistema di equazioni

$$\alpha(1, 3, 1, 2) + \beta(0, 1, 0, 1) + \gamma(1, 0, 3, 2) + \delta(2, 4, 4, 5) + \eta(0, 0, 0, 1) = (1, 3, 4, 4)$$

non ha una unica soluzione, dato che se consideriamo la matrice incompleta del sistema associato (vettori per colonne)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

questa ha rango massimo 4, dato che si vede facilmente che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

e quindi esistono $\infty^{5-4} = \infty^1$ soluzioni.

Definizione 17.14. [HHH37] Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio $W_1, \dots, W_n \subseteq V$. Allora diciamo che

- V è somma di $W_1, \dots, W_n$ se

$$\forall \underline{v} \in V \exists \underline{w}_1 \in W_1, \dots, \underline{w}_n \in W_n \text{ tali che } \underline{v} = \underline{w}_1 + \dots + \underline{w}_n \Leftrightarrow V = W_1 + \dots + W_n$$

- V è somma diretta di $W_1, \dots, W_n$, e scriviamo $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n = \bigoplus_{i=1}^n W_i$ se

$$\forall \underline{v} \in V \exists! \underline{w}_1 \in W_1, \dots, \underline{w}_n \in W_n \text{ tali che } \underline{v} = \underline{w}_1 + \dots + \underline{w}_n$$

Definizione 17.15. [HHH43] Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio $W_1, \dots, W_n \subseteq V$. Diciamo che $W_1, \dots, W_n$ hanno somma diretta o sono in somma diretta o la somma di $W_1, \dots, W_n$ è diretta se

$$W_1 + \dots + W_n = \bigoplus_{i=1}^n W_i$$

Esempio 17.16. [HHH38] I due sottospazi di $\mathbb{R}^5$

$$V = \text{Span}(\underline{e}_1, \underline{e}_2) \quad e \quad W = \text{Span}(\underline{e}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_5)$$

sono in somma diretta e $\mathbb{R}^5 = V \oplus W$, dato che ogni vettore $\underline{u}$ di $\mathbb{R}^5$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori $\underline{e}_i$,

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^5 \lambda_i \underline{e}_i = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \underline{e}_i + \sum_{i=3}^5 \lambda_i \underline{e}_i$$

si scrive in modo unico come un vettore $\underline{v} + \underline{w}$ con $\underline{v} \in V$ e $\underline{w} \in W$.

Esempio 17.17. [HHH39] I due sottospazi di $\mathbb{C}[x]$

$$V = \text{Span}(x^2 + x, x^2 - 1, 3) \quad e \quad W = \text{Span}(x^2, 3x - 1, x^4)$$

non sono in somma diretta. dato che il vettore $x^2 = (x^2 - 1) + 1/3 \cdot 3$ si può scrivere in due modi diversi come somma di vettori di $\mathbb{C}[x]$.

$$x^2 = (x^2 - 1) + 1/3 \cdot 3 + \underset{\underset{V}{\downarrow}}{0} = \underset{\underset{W}{\downarrow}}{0} + \underset{\underset{V}{\downarrow}}{x^2}$$

Notiamo che $x^2 \in V \cap W$. Può venire il sospetto che se $V \cap W \neq \{0\}$ la somma non possa essere diretta. In effetti, questo è vero e vale anche il viceversa

Proposizione 17.18. [HHH41] Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio $W_1, \dots, W_n \subseteq V$. Allora

1. Se $n = 2$ abbiamo che la somma di W_1, W_2 è diretta se e solo se

$$W_1 \cap W_2 = \{0\} \Leftrightarrow \dim W_1 \cap W_2 = 0$$

2. La somma di $W_1, \dots, W_n$ è diretta se e solo se

$$\dim \bigoplus_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n \dim W_i$$

3. In generale abbiamo che la somma di $W_1, \dots, W_n$ è diretta se e solo se

$$W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_n) = \{0\} \text{ come dire } W_i \cap \sum_{j \neq i} W_j = \{0\}$$

Dimostrazione.

1. Dimostriamo che la somma di W_1, W_2 non è diretta se e solo se $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$

- (a) È facile vedere che se $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$ la somma non è diretta. Infatti

$$\exists \underline{w} \neq \underline{0} \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \underline{w} = \underset{\underset{W_1}{\downarrow}}{0} + \underset{\underset{W_2}{\downarrow}}{\underline{w}} = \underset{\underset{W_1}{\downarrow}}{\underline{w}} + \underset{\underset{W_2}{\downarrow}}{0}$$

ed abbiamo scritto $\underline{w}$ in due modi diversi come somma di vettori di W_1 e W_2 . Abbiamo quindi dimostrato che $W_1 \cap W_2 \neq \{0\} \Rightarrow$ la somma di W_1, W_2 è diretta.

- (b) Supponiamo che $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$. Allora esiste $\underline{w} \neq \underline{0} \in W_1 \cap W_2$ e quindi esistono $\underline{w}_1 \in W_1, \underline{w}_2 \in W_2$ tali che $\underline{w} = \underline{w}_1 = \underline{w}_2$. quindi $\underline{w}$ si può scrivere in due modi diversi

$$\underline{w} = \underset{\underset{W_1}{\downarrow}}{0} + \underset{\underset{W_2}{\downarrow}}{\underline{w}_2} = \underset{\underset{W_1}{\downarrow}}{\underline{w}_1} + \underset{\underset{W_2}{\downarrow}}{0}$$

e questa è una contraddizione.

2. Dimostriamo che se la somma è diretta vale la formula

$$\dim \text{Span}(W_1, \dots, W_n) = \sum_{i=1}^n \dim W_i$$

per induzione sul numero di addendi. Potremmo [partire dal caso $n = 1$, ma anche il caso $n = 2$ già dimostrato, è la formula di Grassman. Supponiamo vera la formula per n . Dimostriamola per $n + 1$.

$$\dim \bigoplus_{i=1}^{n+1} W_i = \dim \left(\left(\bigoplus_{i=1}^n W_i \right) + W_{n+1} \right)$$

Grassman

$$= \dim \bigoplus_{i=1}^n W_i + \dim W_{n+1}$$

Ipotesi induttiva

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \dim W_i + \dim W_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \dim W_i \end{aligned}$$

Il viceversa è lasciato per esercizio.

□

Esercizio 17.19. [HHH77] Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio $W_1, \dots, W_n \subseteq V$. Allora non necessariamente

$$\forall i, j \quad W_i \cap W_j = \{\underline{0}\}$$

implica che la somma di $W_1, \dots, W_n$ sia diretta.

Infatti, siano W_1, W_2, W_3 tre rette distinte di $\mathbb{R}^2$, passanti per l'origine e complanari (appartengono per esempio al piano $\pi : z = 0$). Allora

- $\forall i, j \quad W_i \cap W_j = \{\underline{0}\}$
- $\dim(W_1 + W_2 + W_3) = 2$ Dato che la loro somma è il piano π .
- $\dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 = 1 + 1 + 1 = 3$