Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2022/23

Caboara

Esame scritto 17 Luglio

PRIMA PARTE
Punteggio: risposta corretta = 1 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome: **Nome:**

1. Disegnare sul piano di Argand Gauss, le soluzioni dell'equazione $iz^2 + 2z - i = 0$.
   Soluzione:$z = i$, **molteplicità doppia**
2. Dare, se esistono, due coppie $(a, b) \in \mathbb{C}^2,\ (a, b) \neq \underline{0}$, tali che sia invertibile la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$$
   Soluzione: per esempio $(0, 1),\ (1, 0)$
3. Dato $V = \mathrm{Span}((5, 3, 2), (2, 3, -1)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$ il vettore $(1, 3, 1)$ appartiene a V?
   Soluzione: No
4. Determinare in $\mathbb{C}[x]$ $\gcd(x^2 + 2ix - 1, x^2 + 1)$.
   Soluzione: $\gcd = x + i$
5. Dare la dimensione delle soluzioni del sistema
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0}$$
   Soluzione: 2.

SECONDA PARTE
I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1. *(9 pt)*
Dato $a \in \mathbb{R}$ ed il sistema sui reali

$$\begin{cases} x + 3y + az = 1 \\ ax + y + 3z = 0 \\ x + ay + 3z = 0 \end{cases}$$

1. *Per quali a esiste un unica soluzione?*
2. *Per gli altri a discutere le soluzioni del sistema.*

Soluzione. Calcoliamo il determinante della matrice incompleta associata al sistema

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ a & 1 & 3 \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix} = a^3 - 13a + 12 = d(a)$$

Dato che $d(1) = 0$, dividiamo $a^3 - 13a + 12$ per $a - 1$, ottenendo $a^2 + a - 12$. Troviamo le due radici di quest'ultimo polinomio usando la formula per le radici di secondo grado $a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = -4, 3$ Il determinante si annulla solo per $a = -4, 1, 3$ e quindi se $a \neq -4, 1, 3$ il sistema ammette un unica soluzione. Esaminiamo i tre rimanenti casi col teorema di Rouché-Capelli, calcolando i ranghi delle matrici incompleta e completa

1. $a = -4$
$$rk \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} = 2 \quad rk \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 3 \quad \nexists \text{ soluzioni.}$$
2. $a = 1$
$$rk \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \quad rk \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \infty^{3-2} = \infty^1 \text{ soluzioni.}$$
3. $a = 3$
$$rk \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2 \quad rk \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 3 \quad \nexists \text{ soluzioni.}$$

Concludendo

1. Se $a \neq -4, 1, 3$ $\exists!$ soluzione.
2. Se $a = 1$ $\exists$ ∞^1 soluzioni.
3. Se $a = -4, 3$ $\nexists$ soluzione.

$\square$

Esercizio 2. *(9 pt) Dati i tre sottospazi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-\alpha z = 0\}, \\ V_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+\alpha z = 0\}, \\ V_3 &= \operatorname{Span}((\alpha,\alpha,1)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Determinare, al variare α e quando possibile, una base di $V_1 \cap V_2 \cap V_3$

Soluzione.

Possiamo trovare una rappresentazione cartesiana di V_3, che avrà due equazioni dato che $\dim V_3 = 1$, mettere a sistema la quattro equazioni associate rispettivamente a V_1, V_2, V_3 e trovare una base delle soluzioni del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. In particolare, per trovare una descrizione cartesiana di V_3 partiamo da un suo vettore generico $t(\alpha,\alpha,1) = (t\alpha, t\alpha, t)$, denotiamo come x, y, z, rispettivamente, la prima, seconda e terza componente e ricaviamo due equazioni (la dimensione di V_3 è uno) che coinvolgano solo queste tre variabili dal sistema (si tratta di eliminare il parametro t, mentre α ̀dato)

$$\begin{cases} x = \alpha t \\ y = \alpha t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha z \\ y = \alpha z \\ z = t \end{cases}$$

Una descrizione cartesiana di V_3 è quindi

$$V_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = \alpha z \\ y = \alpha z \end{cases} \right\}$$

Proponiamo qui un procedimento alternativo.

Vediamo quando $V_1 \supset V_3$. Il vettore generico di V_3 è $(t\alpha, t\alpha, t)$, con $t \in \mathbb{R}$, è contenuto in V_1 se e solo se soddisfa la condizione cartesiana di V_1, $x + y - \alpha z = 0$, quindi se

$$t\alpha + t\alpha - \alpha t = 0 \Leftrightarrow t\alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 & \text{Se } \alpha \neq 0 \\ \forall\ t \in \mathbb{R} & \text{Se } \alpha = 0 \end{cases}$$

Nel primo caso, l'intersezione $V_1 \cap V_3$ ̀data dalla sola origine (il vettore di V_3 con $t = 0$ nella rappresentazione parametrica), nel secondo da tutto V_3, dato che per ogni $t \in \mathbb{R}$ il vettore generico di V_3 sta in V_1.

In conclusione:

1. se $\alpha \neq 0$, $V_1 \cap V_3 = \underline{0}$ e quindi $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \underline{0}$, e quindi $V_1 \cap V_2 \cap V_3$ non ha base.
2. Se $\alpha = 0$, $V_1 \cap V_3 = V_3$. Ripetiamo il ragionamento fatto sopra con V_2 al posto di V_1.

   Vediamo quando $V_2 \supset V_3$. Il vettore generico di V_3 è $(0,0,t)$, con $t \in \mathbb{R}$, è contenuto in V_2 se e solo se soddisfa la condizione cartesiana di V_1 con $\alpha = 0$, $x - y = 0$, quindi se $t\alpha - t\alpha = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, ovvero per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi $V_2 \cap V_3 = V_3$ e $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = V_3$, ed una sua base è una base di V_3, per esempio $B = (0,0,1)$.

□

Esercizio 3. *(9 pt) Dato l'endomorfismo* $T\colon \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ *associato alla matrice*

$$(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Al variare di $a \in \mathbb{K}$, *calcolare il polinomio caratteristico di* T *e discutere la diagonabilizzabilità di* T *se* $\mathbb{K} = \mathbb{Q},\ \mathbb{R},\ \mathbb{C}$.

Soluzione. Calcoliamo il polinomio caratteristico di T sviluppando per la prima colonna

$$\begin{aligned}
p_T(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & a & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= -\lambda \det \begin{pmatrix} -\lambda & a & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -\lambda & a & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \\
&= -\lambda(-\lambda)(\lambda^2 + a) - 1 \cdot 2(\lambda^2 + a) \\
&= \lambda^2(\lambda^2 + a) - 2(\lambda^2 + a) \\
&= (\lambda^2 + a)(\lambda^2 - 2)
\end{aligned}$$

1. Su $\mathbb{Q}$ il fattore $\lambda^2 - 2$ è irriducibile, T non ha tutti gli autovalori nel campo e quindi non è diagonalizzabile.

2. Su $\mathbb{R}$ il fattore $\lambda^2 - 2$ ha radici distinte. Discutiamo, al variare di a, il fattore $\lambda^2 + a$.

   (a) Se $a = -2$ il secondo fattore diviene uguale al primo, $\lambda^2 - 2$, ho quindi due autovalori $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ di molteplicità algebrica 2; calcoliamo la loro molteplicità geometrica, ricordando che siamo nel caso $a = -2$

   $$\mathrm{mg}(\sqrt{2}) = 4 - rk \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1$$

   $$\mathrm{mg}(-\sqrt{2}) = 4 - rk \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1$$

   In ambedue i casi si vede che la terza riga è multipla della seconda, e ci sono tre pivot. Quindi T non è diagonalizzabile.

(b) Se $a < 0,\ a \neq -2$ il fattore $\lambda^2 + a$ ha due radici distinte, e distinte dlla radici del primo fattore. Quindi T è diagonalizzabile.

(c) Se $a = 0$ il fattore diviene λ^2, ho quindi un autovalore $\lambda_3 = 0$ di molteplicità algebrica 2; calcoliamo la sua molteplicità geometrica, ricordando che siamo nel caso $a = 0$

$$\mathrm{mg}(0) = 4 - rk \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1$$

dato che la sottomatrice 3×3 ottenuta eliminando la seconda riga e la prima colonna è non singolare e quindi T non è diagonalizzabile.

(d) Se $a > 0$ il fattore $\lambda^2 + a$ è irriducibile, T non ha tutti gli autovalori nel campo e quindi non è diagonalizzabile.

3. Su $\mathbb{C}$

(a) Se $a \neq 0, -2$ il polinomio caratteristico ha radici distinte, e quindi T è diagonalizzabile.

(b) Se $a = 0, -2$, come sopra, T non è diagonalizzabile.

$\square$