Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2023/24

Caboara

Esame scritto 15 Luglio

PRIMA PARTE Punteggio: risposta corretta = 2 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome: **Nome:**

1. Determinare gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\begin{cases} z^{12} = 3 \\ \mathrm{Re}(z) = 0 \end{cases}$

   Soluzione: $\sqrt[12]{3}e^{i\pi/2}$, $\sqrt[12]{3}e^{i3/2\pi}$ oppure $\pm \sqrt[12]{3}i$

2. Determinare la dimensione del sottospazio vettoriale $W = \{(a+b, 2a+b-2c, a+b, a+2b+2c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

   Soluzione: 2

3. Determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il rango della matrice A sapendo che

$$A^T = \begin{pmatrix} a & a-1 & a+2 & a-1 \\ 2a-1 & a^2 & -a & a+2 \end{pmatrix}$$

   Soluzione: $\forall\ a \in \mathbb{R}\ \ rk(A) = 2$

4. Determinare l'inversa della matrice $M = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{7} \\ 1-\sqrt{7} & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$

   Soluzione: $M^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & -1-\sqrt{7} \\ -1+\sqrt{7} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

5. Dato il polinomio $f(x) = x^6 + 7x^4 + 16x^2 + 12$ determinare la sua parte squarefree.

   Soluzione: $(x^2+2)(x^2+3) = x^4 + 5x^2 + 6$

SECONDA PARTE
I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1 (8pt)**.** *Al variare di $a \in \mathbb{R}$ discutere le soluzioni del sistema di tre equazioni e tre incognite con matrice associata completa*

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a-1 & 2a^3 & 1 \\ 2 & a^2 & 0 & a-1 \\ 2 & a & 3a^5 & 1 \end{array}\right)$$

Dimostrazione. Potremmo naturalmente ridurre direttamente la matrice completa con Gauss. Esponiamo qui un procedimento alternativo.

Dato che stiamo solo discutendo le soluzioni, possiamo supporre $a \neq 0$, e dividere la terza colonna della matrice per a^3, (esamineremo a parte il caso $a = 0$) ottenendo la matrice completa

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a-1 & 2 & 1 \\ 2 & a^2 & 0 & a-1 \\ 2 & a & 3a^2 & 1 \end{array}\right)$$

Al posto della seconda riga sostituiamo la differenza della seconda e terza riga. Le soluzioni non cambiano ed otteniamo la matrice

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a-1 & 2 & 1 \\ 0 & a^2-a & -3a^2 & a \\ 2 & a & 3a^2 & 1 \end{array}\right)$$

sviluppando per la prima colonna il determinante della matrice incompleta é chiaramente

$$2\det\begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ a^2-a & -3a^2 \end{pmatrix} = 2(-3a^2(a-1) - 2a(a-1)) = 2a(a-1)(-3a-2);$$

che sia annulla se e solo se (ricordiamo che siamo nelle condizioni $a \neq 0$) $a = 1, -\frac{2}{3}$.

Consideriamo adesso il caso generale e i tre casi particolari.

Se $a \neq -\frac{2}{3}, 1, 0$ la matrice incompleta ha rango pieno 3, forzando la matrice completa ad avere rango pieno 3. Quindi per Rouché Capellli esiste un unica soluzione. Esaminiamo i tre casi particolari

- $a = 0$. Sostituendo **nella matrice A di partenza** $a = 0$ otteniamo la matrice

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

  la matrice incompleta ha rango 2, mentre la completa ha rango 3, dato che

$$\det A'_{(1,2,3);(1,2,4)} = \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

  Per Rouché Capellli, non esistono soluzioni.

- $a = 1$. **Nella matrice C** operiamo la sostituzione $a = 1$ ottenendo la matrice

$$C' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

la matrice incompleta ha rango 2, mentre la completa ha rango 3, dato che

$$\det C'_{(1,2,3);(1,2,4)} = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$$

Per Rouché Capellli, non esistono soluzioni.

- $a = -\frac{2}{3}$ **Nella matrice C** operiamo la sostituzione $a = -\frac{3}{2}$ ottenendo la matrice

$$C'' = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 2 & 1 \\ 0 & -2/9 & -4/3 & 2/3 \\ 2 & 2/3 & 4/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Operiamo con Gauss.

```
C2:=Mat([[0, -1/3, 2, 1],
         [0, -2/9, -4/3, 2/3],
         [2, 2/3, 4/3, 1]]);
RiduciScalaVerbose(C2);
Scambio la 1^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[2, 2/3, 4/3, 1],
     [0, -2/9, -4/3, 2/3],
     [0, -1/3, 2, 1]])
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2/9
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, 2/3, 4/3, 1]
-------------- [0, -2/9, -4/3, 2/3]
   3^a-3/2*2^a [0, 0, 4, 0]
```

la matrice incompleta ha tre pivot, come la completa. Hanno entrambe rango tre e quindi per il Teorema di Rouché Capellli, esiste un unica soluzione.

Riassumendo, il sistema non ha soluzioni per $a = 0, 1$, ha un' unica soluzione altrimenti.

$\square$

Esercizio 2 (8pt)**.** *Dati i sottospazi di* $\mathbb{R}^4$

$$U = \mathrm{Span}(\underline{u} = (1, 0, -1, 2)), \qquad V = Span(\underline{v}_1 = (1, 1, 1, 0), \underline{v}_2 = (0, -1, 2, 1))$$

e

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\mid\; 2x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$$

1. Verificare che $U \subseteq W$ e completare una base di U ad una base di W.

2. Determinare una base di $W + V$ ed una di $V \cap W$.

Dimostrazione.

1. Dato che il vettore $\underline{u} = (1, 0, -1, 2)$ base di U soddisfa l'equazione $2x_1 + x_2 - x_4 = 0$, descrizione cartesiana di W, (infatti $2 \cdot 1 + 0 - 2 = 0$), abbiamo che $\underline{u} \in W$ e quindi $U = \mathrm{Span}(\underline{u}) \subseteq W$.

   Troviamo un base di W, che ha dimensione 3 ed è uguale a $\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$, con $A = \begin{pmatrix} 2, 1, 0, -1 \end{pmatrix}$. Troviamo quindi una base delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

   Un vettore generico di W si ottiene da un vettore generico (x_1, x_2, x_3, x_4) di $\mathbb{R}^4$ con la condizione $x_4 = 2x_1 + x_2$, ed è quindi

$$(x_1, x_2, x_3, 2x_1 + x_2) = x_1(1, 0, 0, 2) + x_2(0, 1, 0, 1) + x_3(0, 0, 1, 0)$$

   Una base di W è quindi $B_W = (1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)$. Per completare la base $\underline{u} = (1, 0, -1, 2)$ di U a base di W riduciamo con Gauss la prima riga della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Notiamo che la seconda e quarta riga della matrice sono uguali, e che le prime tre righe della matrice sono linearmente indipendenti. Quindi un completamento di $B_U = (1, 0, -1, 2)$ a base di W è dato da

$$B'_W = (1, 0, -1, 2), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)$$

2. Riduciamo a scala la matrice le cui colonne sono le basi di W e V (usiamo, arbitrariamente, B_W e non B'_W perchè la riteniamo più semplice)

```
M:=Mat[[1, 0, 0, 1, 0],
       [0, 0, 1, 1, -1],
       [0, 1, 0, 1, 2],
       [2, 0, 1, 0, 1]];
RiduciScalaVerbose(M);
```

```
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 0, 0, 1, 0]
  0 sotto pivot[0, 0, 1, 1, -1]
  0 sotto pivot[0, 1, 0, 1, 2]
     4^a-2*1^a [0, 0, 1, -2, 1]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[ [1, 0, 0, 1, 0],
     [0, 1, 0, 1, 2],
     [0, 0, 1, 1, -1],
     [0, 0, 1, -2, 1]]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 0, 0, 1, 0]
-------------- [0, 1, 0, 1, 2]
  0 sotto pivot[0, 0, 1, 1, -1]
  0 sotto pivot[0, 0, 1, -2, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 0, 0, 1, 0]
-------------- [0, 1, 0, 1, 2]
-------------- [0, 0, 1, 1, -1]
     4^a-1*3^a [0, 0, 0, -3, 2]
```

Dato che che la matrice ha 4 pivot, uno in ciascuna delle prime quattro colonne, le prime quattro colonne **della matrice originaria** mi danno una base di $W + V$,

$$B_{W+V} = (1, 0, -1, 2), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 10)$$

Quindi $\dim(W + V) = 4$, e dato che $\dim(W) = 3$ e $\dim(V) = 2$ (si vede immediatamente che $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti), per la formula di Grassmann ho immediatamente che $\dim(W \cap V) = 1$.

L'unica riga della matrice ridotta che abbia le prime tre componenti (quelle relative a W) nulle è la quarta, che mi dá quindi la condizione $-3a + 2b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}b$ da imporre al vettore generico $a(1, 1, 1, 0) + b(0, -1, 2, 1)$ di V perchè appartenga a $W \cap V$. Un vettore generico di $W \cap V$ è quindi

$$\frac{2}{3}b(1, 1, 1, 0) + b(0, -1, 2, 1) = \left(\frac{2}{3}b, -\frac{1}{3}b, \frac{8}{3}b, b\right) = (2b, -b, 8b, 3b) = b(2, -1, 8, 3)$$

una base di $W \cap V$ é quindi $(2, -1, 8, 3)$, come previsto formata da un solo vettore.

Ricapitoliamo:

1. Abbiamo verificato che $U \subseteq W$ ed il completamento di una base di U a base di W è $(1, 0, -1, 2), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)$.
2. Una base di $W + V$ è $(1, 0, -1, 2), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 10)$ ed una base di $V \cap W$ è $(2, -1, 8, 3)$.

$\square$

Esercizio 3 (8pt)**.** *Dato $k \in \mathbb{R}$ e l'endomorfismo $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato dalle basi canoniche alla matrice*

$$(M_F)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Discutere la diagonalizzabilità di F al variare di k.*
2. *Determinare una base B di autovettori di F, quando possibile e in dipendenza da k.*
3. *Determinare, se esiste, k tale che $(1,1,1)$ sia un autovettore di F.*
4. *Determinare, se esiste, k tale che le colonne di $(M_F)_{E_3}^{E_3}$ siano autovettori di F.*

Dimostrazione.

1. Notiamo che dato che $(M_F)_{E_3}^{E_3}$ è diagonale e con elementi sulla diagonale distinti, F ha tre autovalori distinti, $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ ed è quindi diagonalizzabile per ogni k.
2. Determiniamo una base di autovettori unendo le basi di autovettori di V_0, V_1, V_2, che hanno tutti dimensione 1 per quanto osservato nel unto precedente.
   (a) Una descrizione cartesiana di V_0 è data dal sistema di equazioni

$$\begin{aligned} F((x,y,z)) &= \lambda_0(x,y,z) \\ \left((M_F)_{E_3}^{E_3} - \lambda I_3\right)_{\lambda=0} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \underline{0} \\ \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & k \\ 0 & 2-\lambda & k \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=0} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \underline{0} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \underline{0} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + kz = 0 \\ 2y + kz = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -kz \\ y = -\frac{k}{2}z \end{cases}$$

Un vettore generico di V_0 è quindi $(-kz, -\frac{k}{2}z, z)$ ed una base è $(-k, -\frac{k}{2}, 1)$.

(b) Procedendo come sopra per $\lambda_1 = 1$ abbiamo che una descrizione cartesiana di V_1 è data dal sistema di equazioni

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & k \\ 0 & 2-\lambda & k \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{cases} kz = 0 \\ y + kz = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Un vettore generico di V_1 è quindi $(x, 0, 0)$ ed una base è $(1, 0, 0)$.

(c) Procedendo come sopra per $\lambda_2 = 2$ abbiamo che una descrizione cartesiana di V_2 è data dal sistema di equazioni

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & k \\ 0 & 2-\lambda & k \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & k \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{cases} -x + kz = 0 \\ kz = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Un vettore generico di V_2 è quindi $(0, y, 0)$ ed una base è $(0, 1, 0)$.

Una base di autovettori di F è data dall'unione delle basi dei tre autospazi, e quindi è $B = (1, 0, 0), (0, 1, 0), \left(-k, -\frac{k}{2}, 1\right)$.

3. Perchè un vettore sia un autovettore deve essere non nullo ed appartenere ad un autospazio. Il vettore $(1, 1, 1)$ non può appartenere agli autospazi V_{λ_1}, V_{λ_2} dato che ha la terza componente non nulla, e i vettori delle basi di questi autospazi hanno la terza componente nulla.

Vediamo, in dipendenza da k se

$$\begin{aligned}
(1,1,1) \in V_{\lambda_0} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tale che} (1,1,1) = \alpha \left(-k, -\frac{k}{2}, 1\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tale che} \begin{cases} 1 = -\alpha k \\ 1 = -\alpha \frac{k}{2} \\ 1 = \alpha \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tale che} \begin{cases} 1 = -k \\ 1 = -\frac{k}{2} \\ 1 = \alpha \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tale che} \begin{cases} -1 = k \\ -2 = k \\ \alpha = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

e questo è impossibile, quindi $(1,1,1) \notin V_{\lambda_0}$

4. Vediamo immediatamente che la prima e la seconda colonna di

$$(M_F)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono autovettori di F, dato che una base di autovettori è $B = (1,0,0), (0,1,0), \left(-k, -\frac{k}{2}, 1\right)$. *(Per la seconda colonna, abbiamo immediatamente che* $(0,2,0) \in V_{\lambda_1} = \text{Span}((0,1,0))$*)*

Usiamo la defінzione di autovettore e controlliamo se anche la terza colonna lo è, ovvero se esiste un autovalore $\beta \in 0,1,2$ tale che, in dipendenza da k,

$$\begin{aligned}
T((k,k,0)) = \beta(k,k,0) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta k \\ \beta k \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} k = \beta k \\ k = 2\beta k \\ 0 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ricordando che il vettore nullo non è un autovettore, e tanto meno un elemento di una base. Abbiamo i due casi

- $k = 0$, il sistema diviene
$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$
che ha soluzioni addirittura per ogni β, ma in questo caso la terza colonna di $(M_F)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è il vettore nullo, che non può essere elemento di una base.

- $k \neq 0$, il sistema diviene, dopo aver diviso le due equazioni per k
$$\begin{cases} 1 = \beta \\ 1 = 2\beta \end{cases}$$
che non ha soluzioni per $\beta \in 0, 1, 2$ (in effetti, per alcun $\beta \in \mathbb{R}$).

Conclusioni:

1. F è sempre diagonalizzabile $\forall\ k \in \mathbb{R}$.
2. Una base di autovettori di F è $B = (1,0,0), (0,1,0), \left(-k, -\frac{k}{2}, 1\right)$.
3. $(1,1,1)$ non è autovettore di F per alcun k.
4. Le colonne di $(M_F)_{E_3}^{E_3}$ non formano mai una base autovettori di F.

$\square$